Übungen zur Theoretischen Physik 3 (Elektrodynamik & SRT) — Blatt 7

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, WS 15/16 —

Aufgabe 7.1 *Geladenes Teilchen im homogenen E- und B-Feld* (1 Punkt)

Wir betrachten die Bewegung einer Punktladung q mit Masse m in einem homogenen elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$ und einer homogenen magnetischen Flussdichte $\boldsymbol{B}$.

a) Das elektrische Feld und die magnetische Flussdichte seien beide parallel zur x_3-Achse orientiert. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$ der Punktladung auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}(0) = 0$ und $\dot{\boldsymbol{x}}(0) = (v_1, 0, v_3)$. Skizzieren Sie die Lösung.

b) Wiederholen Sie Teil a) für ein beliebiges homogenes elektrisches Feld in der x_2-x_3-Ebene, $\boldsymbol{E} = (0, E_2, E_3)$, und die magnetische Flussdichte aus a).

Aufgabe 7.2 *Helmholtz-Spule* (1,5 Punkte)

In dieser Aufgabe soll eine einfache Anordnung konstruiert werden, mit der sich eine möglichst homogene magnetische Flussdichte in einem kleinen Bereich erzeugen lässt.

a) Eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius R und Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt in der x_1-x_2-Ebene und wird von einem Strom I gegen den Uhrzeigersinn (Blickrichtung gegen die x_3-Achse) durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Flussdichte auf der x_3-Achse, $\boldsymbol{B}(x_3\boldsymbol{e}_3)$.

b) Betrachten Sie nun zwei kreisförmige Leiterschleifen jeweils mit Radius R, die parallel zur x_1-x_2-Ebene liegen und deren Mittelpunkte sich bei $x_3 = D/2$ bzw. $x_3 = -D/2$ befinden. Beide werden von einem Strom I gegen den Uhrzeigersinn durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Flussdichte auf x_3-Achse.

c) Zeigen Sie, dass die Ableitung der magnetischen Flussdichte in x_3-Richtung auf der x_3-Achse für $x_3 = 0$ verschwindet. Für welches Verhältnis R/D verschwindet auch die zweite Ableitung?

Bitte wenden

Aufgabe 7.3 *Levi-Civita-Symbol* (2 Punkte)

Das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} mit $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ ist definiert durch

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (ijk) = (123), (231), (312), \\ -1 & \text{für } (ijk) = (213), (132), (321), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols lassen sich die Komponenten eines Vektorproduktes gemäß $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k$ schreiben.

a) Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

$$\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl},$$
$$\sum_{k,l} \epsilon_{ikl}\epsilon_{jkl} = 2\delta_{ij}.$$

b) Beweisen Sie folgende Relationen mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}),$$
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}))\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}))\, \boldsymbol{a}.$$

c) Zeigen Sie, dass sich die Determinante einer 3×3 Matrix A als

$$\det A = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\, A_{1i}\, A_{2j}\, A_{3k}$$

schreiben lässt.

d) Für die Basisvektoren eines rechtshändigen Orthonormalsystems gilt $\boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k) = \epsilon_{ijk}$. Verwenden Sie dies, um abzuleiten, wie sich das Levi-Civita-Symbol unter einer orthogonalen Koordinatentransformation $\hat{\boldsymbol{e}}_i = \sum_j \boldsymbol{e}_j D_{ji}$ (d.h. $D^{-1} = D^T$) transformiert. Unter welcher Bedingung ist ϵ_{ijk} invariant?