Aufgabe 3.1 *Flächenintegrale am Beispiel des Torus* (1,5 Punkte)

Die Oberfläche eines Torus lässt sich durch zwei Parameter $u, v \in [0, 2\pi)$ darstellen durch

$$\boldsymbol{x} = a \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \cos v \sin u \\ \sin v \sin u \\ \cos u \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wobei $a > b$ sei. Berechnen Sie die folgenden Größen durch direkte Integration (d.h. ohne Verwendung des Gauß'schen Integralsatzes) und erklären sie jeweils das Ergebnis:

a) die Oberfläche des Torus, d.h. das Integral $\oint_T \mathrm{d}A$, wobei T die Oberfläche des Torus beschreibt,

b) das Oberflächenintegral $\oint_T \mathrm{d}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{F}$ für ein beliebiges, konstantes Vektorfeld $\boldsymbol{F}$,

c) das Oberflächenintegral $\oint_T \mathrm{d}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{F}$ für das Feld

$$\boldsymbol{F} = \frac{k}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Aufgabe 3.2 *Punktladung innerhalb einer geerdeten Kugelschale* (1 Punkt)

Betrachten Sie eine Punktladung q an einem beliebigen Punkt $\boldsymbol{a}$ im Innenraum einer leitenden Kugelschale mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Gehen Sie im Folgenden analog zum Beispiel der Vorlesung vor, in dem das Potential für eine Punktladung *außerhalb* einer geerdeten leitenden Kugel berechnet wurde.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der Bildladungen das Potential $\Phi(\boldsymbol{x})$ im Innenraum der Kugelschale.

b) Geben Sie die Green'sche Funktion $G_D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ für die Lösung des Dirichlet-Problems einer beliebigen Ladungsverteilung im Innenraum der Kugelschale an.

Aufgabe 3.3 *Punktladung außerhalb einer isolierten, leitenden Kugel* (0,5 Punkte)

In der Vorlesung wurde das Potential für eine Punktladung außerhalb einer *geerdeten* leitenden Kugel mit der Methode der Bildladungen berechnet. In dieser Aufgabe wird nun eine Punktladung außerhalb einer *nicht* geerdeten, elektrisch neutralen, leitenden Kugel betrachtet.

a) Bestimmen Sie das Potential $\Phi(\boldsymbol{x})$ am Ort $\boldsymbol{x}$ für eine Punktladung q am Ort $\boldsymbol{a}$ außerhalb einer leitenden Kugel mit Radius R im Ursprung und verschwindender Gesamtladung. Gehen Sie von dem in der Vorlesung diskutierten Fall der geerdeten Kugel aus und verwenden Sie eine weitere, geeignet angebrachte Bildladung.

b) Bonusaufgabe: (0,5 Sonderpunkte)
Berechnen Sie die Kraft, die auf die Punktladung am Punkt $\boldsymbol{a}$ wirkt. Zeigen Sie damit, dass die Energie, die beim Annähern der Punktladung q aus dem Unendlichen an die ungeladene leitende Kugel bis zum Abstand d vom Ursprung frei wird, durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2 R^3}{2d^2(R^2 - d^2)}. \tag{3}$$

Aufgabe 3.4 *Punktladung im Quadrant zweier senkrechter Halbebenen* (1,5 Punkte)

Eine Punktladung q befinde sich an einem beliebigen Ort $\boldsymbol{a}$ vor zwei metallischen, geerdeten Halbebenen, die sich in einem Winkel von 90° schneiden (siehe Skizze).

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der Bildladungen das Potential $\Phi(\boldsymbol{r})$ in dem Quadranten, in dem sich die Punktladung befindet. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass die Punktladung in der x-y-Ebene liegt und der Koordinatenursprung in der Schnittgerade der Halbebenen.

b) Berechnen Sie den ersten nichtverschwindenden Beitrag zum Potential und dem elektrischen Feld für Abstände von den Halbebenen, die viel kleiner sind als der Abstand der Punktladung von den Platten.

c) Wie verhält sich das Feld asymptotisch bei großen Abständen von der Schnittgeraden der Halbebenen und von der Punktladung?