Übungen zur Theoretischen Physik 3 (Elektrodynamik & SRT) — Blatt 1

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, WS 15/16 —

Aufgabe 1.1 *Dirac'sche Deltafunktion* (1,5 Punkte)

Die Dirac'sche Deltafunktion $\delta(x)$ ist definiert durch:

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}x\, f(x)\delta(x-a) = f(a), \quad \alpha < a < \beta, \tag{1}$$

für „Testfunktionen" $f(x)$, die per Definition beliebig oft differenzierbar sind und „beliebig schnell" gegen 0 streben für $x \to \alpha, \beta$.

a) Beweisen Sie

$$\delta\left(g(x)\right) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|g'(x_n)|} \tag{2}$$

für $x \in (\alpha, \beta)$, wobei $g(x)$ die einfachen Nullstellen x_n in diesem Intervall habe.

b) Zeigen Sie, dass die Wirkung der n-ten Ableitung der Deltafunktion durch

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}x\, f(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\delta(x-a) = (-1)^n \left.\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\right|_{x=a} \tag{3}$$

gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass die Funktionenschar

$$\delta_y(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}y} e^{-x^2/y^2}, \quad y > 0, \tag{4}$$

für $y \to 0$ eine Darstellung der Deltafunktion $\delta(x)$ für $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$ ist.

Aufgabe 1.2 *Identitäten für den Nabla-Operator* (1 Punkt)

Leiten Sie folgende Identitäten her:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{G}), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{G}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{G}. \tag{6}$$

Verwenden Sie dazu die Produktregel der Differentiation sowie geeignete Rechenregeln für Vektoren oder deren Komponenten.

Aufgabe 1.3 *Gradient und Volumen in krummlinigen Koordinaten* (2 Punkte)

Der *Gradient* $\boldsymbol{\nabla} F$ einer skalaren Funktion F ist durch folgendes Differential definiert:

$$\mathrm{d}F(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} F(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{7}$$

In dieser Aufgabe sollen die Komponenten des Gradienten sowie das Volumenmaß in krummlinigen Koordinatensystemen (q_1, q_2, q_3), wie z.B. Kugelkoordinaten (r, φ, θ) oder Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z), berechnet werden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Die *Einheitsvektoren* der krummlinigen Koordinaten sind durch

$$\boldsymbol{f_i} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}, \qquad h_i = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right| \tag{8}$$

definiert. Für Orthogonalkoordinaten gilt $\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{f}_j = \delta_{ij}$. Zeigen Sie, dass die durch $(\boldsymbol{\nabla} F)_i = \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\nabla} F$ definierten Komponenten des Gradienten bezüglich der Einheitsvektoren $\boldsymbol{f}_i$ durch

$$(\boldsymbol{\nabla} F)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial F}{\partial q_i} \tag{9}$$

gegeben sind. Verwenden Sie dazu die Definition (7) sowie die Kettenregel.

b) Berechnen Sie die Komponenten des Gradienten in Zylinderkoordinaten,

$$\boldsymbol{r} = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z) \tag{10}$$

und Kugelkoordinaten,

$$\boldsymbol{r} = (r \cos\varphi \sin\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\theta). \tag{11}$$

c) Zeigen Sie, dass sich das Volumenmaß wie folgt transformiert:

$$\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \mu(q_1, q_2, q_3)\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{q}, \qquad \mu(q_1, q_2, q_3) = h_1 h_2 h_3. \tag{12}$$

d) Berechnen Sie $\mu(q_1, q_2, q_3)$ in Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten.