

Spezielle Relativitätstheorie

Christian Schwinn

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Physikalisches Institut
D-79104 Freiburg, Germany

Sommer-Semester 2014

Draft: 1. August 2014

<http://www.tep.physik.uni-freiburg.de/lectures/SRT-SS-14>

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 7 |
| 2 | Das Relativitätsprinzip | 13 |
| 2.1 | Inertialsysteme und das Relativitätsprinzip | 13 |
| 2.1.1 | Transformationen zwischen Inertialsystemen | 13 |
| 2.1.2 | Allgemeine Form von Transformationen zwischen Inertialsystemen | 16 |
| 2.2 | Galilei Invarianz | 18 |
| 2.2.1 | Galilei Transformationen | 18 |
| 2.2.2 | Galilei Invarianz der Newtonschen Bewegungsgleichung | 21 |
| 2.2.3 | Erhaltungsgrößen und Noether Theorem | 22 |
| 2.2.4 | Galilei Invarianz und Elektrodynamik | 25 |
| | Transformation von \vec{E} und \vec{B} Feldern? | 25 |
| | Ausbreitung von Wellen | 27 |
| 2.3 | Lorentz Invarianz | 28 |
| 2.3.1 | Lorentz Transformation | 28 |
| 2.3.2 | Eigenschaften der Lorentz-Transformation | 29 |
| | Invariantes Raum-Zeitintervall | 29 |
| | Vierervektoren und Skalarprodukt | 29 |
| | Darstellung im Raum-Zeitdiagramm | 30 |
| | Raum-Zeit Abstände | 32 |
| | Geschwindigkeitsaddition | 33 |
| | Lichtgeschwindigkeit als Grenzggeschwindigkeit | 34 |
| 2.3.3 | Längenkontraktion und Zeitdilatation | 35 |
| | Längenkontraktion | 35 |
| | Zeitdilatation | 36 |
| | Eigenzeit | 37 |
| | „Zwillingsparadoxon“ | 38 |
| 2.3.4 | Doppler Effekt und Aberration | 39 |
| | Doppler Effekt | 39 |
| | Aberration | 41 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3 | Struktur von Lorentz-Transformationen | 43 |
| 3.1 | Gruppentheoretische Begriffe und die Galilei-Gruppe | 43 |
| 3.1.1 | Symmetrietransformationen und Gruppentheorie | 43 |
| 3.1.2 | Drehgruppe | 44 |
| | Darstellungen von Lie Gruppen und Lie Algebren | 46 |
| 3.1.3 | Struktur der Galilei-Gruppe | 47 |
| 3.2 | Lorentzgruppe | 49 |
| 3.2.1 | Definition der Lorentzgruppe | 49 |
| | Lorentz- und Poincarégruppe | 49 |
| | Metrischer Tensor | 49 |
| | Gruppeneigenschaften | 50 |
| 3.2.2 | Zweige der Lorentzgruppe | 51 |
| 3.2.3 | Die Lorentzgruppe als Lie Gruppe | 52 |
| | Zerlegung von Lorentz-Transformationen | 52 |
| | L_+^\uparrow als Liegruppe | 54 |
| | Generatoren und Lie-Algebra | 54 |
| | Kovariante Formulierung | 56 |
| 3.2.4 | Ausblick auf die relativistische Behandlung von Teilchen mit Spin . | 57 |
| 3.3 | Poincarégruppe | 58 |
| 3.4 | Vierervektoren und Tensoren | 59 |
| 3.4.1 | Basisvektoren und Vektoren | 60 |
| 3.4.2 | Duale Vektoren | 60 |
| | Duale (kovariante) Komponenten eines Vektors | 61 |
| | Gradient als dualer Vektor | 62 |
| 3.4.3 | Tensoren | 63 |
| | Tensorprodukt von Vektoren | 64 |
| | Kontravariante Komponenten eines Tensors | 64 |
| | Gemischte Tensoren | 64 |
| | Gradient von Tensorfeldern | 65 |
| | Divergenz eines Vektorfeldes und Wellenoperator | 65 |
| 3.4.4 | Tensoren und Darstellungen der Lorentzgruppe | 65 |
| | Symmetrien von Tensoren | 66 |
| | Zerlegung von Darstellungen | 67 |
| 4 | Relativistische Mechanik | 69 |
| 4.1 | Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls | 69 |
| 4.1.1 | Vierergeschwindigkeit | 69 |
| | Addition von Geschwindigkeiten | 70 |
| 4.1.2 | Viererimpuls | 71 |
| | Viererimpulserhaltung | 72 |
| | Beispiel: Teilchenzerfall | 73 |
| 4.2 | Relativistische Dynamik | 74 |
| 4.2.1 | Viererbeschleunigung | 74 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.2.2 | Minkowski Kraft | 74 |
| | Beispiel: Konstante Beschleunigung | 75 |
| 4.2.3 | Kovariante Formulierung der Lorentz-Kraft | 76 |
| 4.3 | Wirkungsprinzip für relativistische Teilchen | 77 |
| | Hamiltonsches Wirkungsprinzip | 77 |
| | Form der Wirkung | 78 |
| | Freies Teilchen | 79 |
| 4.3.1 | Variation der Wirkung | 80 |
| | Freies Teilchen | 81 |
| | Erhaltungsgrößen | 82 |
| 4.3.2 | Lorentzkraft | 83 |
| 5 | Relativistische Feldtheorie und Elektrodynamik | 85 |
| 5.1 | Kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen | 85 |
| 5.1.1 | Ladungserhaltung und Viererstromdichte | 85 |
| | Vierstromdichte | 85 |
| | Ladungserhaltung | 86 |
| | Viererstromdichte einer Punktladung | 87 |
| 5.1.2 | Maxwellgleichungen | 87 |
| | Inhomogene Maxwellgleichungen | 87 |
| | Homogene Maxwellgleichungen | 88 |
| | Vektorpotential und Eichinvarianz | 89 |
| | Freie Wellenlösungen | 90 |
| | “Herleitung” der Maxwell-Gleichungen | 91 |
| 5.1.3 | Lorentztransformationen der elektrischen und magnetischen Felder . | 91 |
| | Beispiel | 92 |
| 5.2 | Lagrange und Hamiltonsche Feldtheorie | 93 |
| 5.2.1 | Wirkung und Lagrangedichte | 94 |
| 5.2.2 | Variationsprinzip | 95 |
| 5.2.3 | Hamiltonfunktion | 96 |
| 5.2.4 | Reelles Skalarfeld | 96 |
| 5.2.5 | Energie-Impulstensor | 98 |
| 5.3 | Wirkungsprinzip für das Elektromagnetische Feld | 99 |
| 5.3.1 | Lagrangedichte und Feldgleichungen | 99 |
| 5.3.2 | Energie-Impulstensor | 100 |
| 6 | Ausblick auf die ART | 103 |
| 6.1 | Das Äquivalenzprinzip und physikalische Konsequenzen | 104 |
| 6.1.1 | Das Äquivalenzprinzip | 104 |
| 6.1.2 | Erste physikalische Konsequenzen | 104 |
| | Lichtablenkung im Gravitationsfeld | 104 |
| | Rotverschiebung im Gravitationsfeld | 105 |
| 6.2 | Beschleunigte Bezugssysteme in der SRT | 105 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 6.2.1 | Gleichmäßig beschleunigtes Bezugssystem | 105 |
| 6.2.2 | Allgemeine Koordinatentransformationen | 106 |
| 6.3 | Überblick über die Allgemeine Relativitätstheorie | 107 |
| 6.3.1 | Vom Äquivalenzprinzip zur gekrümmten Raumzeit | 107 |
| | Lokale Inertialsysteme | 107 |
| | Gravitation und das Äquivalenzprinzip | 108 |
| 6.3.2 | Punktteilchen im Gravitationsfeld | 109 |
| 6.3.3 | Beispiele für Metriken | 111 |
| 6.3.4 | Elektromagnetische Feldegleichungen in der gekrümmten Raumzeit | 113 |
| | Minimale Substitution | 113 |
| | Maxwell-Gleichungen und Lorentz-Kraft | 114 |
| 6.3.5 | Feldgleichung für das Gravitationsfeld | 114 |

Kapitel 1

Einleitung

Relativitätsprinzip der Newtonschen Mechanik

Ein zentraler Begriff sowohl in der Newtonschen Mechanik als auch in der Speziellen Relativitätstheorie ist das **Inertialsystem**.

Definition. *Ein Körper, der keiner Krafteinwirkung unterliegt, bewegt sich in einem Inertialsystem geradlinig und gleichförmig.*

Die Bedeutung der Inertialsysteme für die Beschreibung der physikalischen Gesetze rührt von dem Postulat des **Relativitätsprinzips** her:

Postulat. *Alle Inertialsysteme I und I' sind physikalisch gleichwertig, d.h. Experimente liefern in allen Inertialsystemen dieselben Ergebnisse.*

Eine Folgerung ist, dass es **kein ausgezeichnetes Inertialsystem** (z.B. kein ausgezeichnetes Ruhesystem) gibt, obwohl Galilei und Newton noch an dem Begriff eines absoluten Raumes festhalten. Als Beispiel verwendet Galilei in seinem “Dialog über die Weltsysteme” einen Raum unter dem Deck eines Schiffes. Die Ergebnisse von Experimenten wie dem Verfolgen der Flugbahn von Schmetterlingen oder dem Werfen von Gegenständen hängen nicht davon ab, ob das Schiff im Hafen ruht oder in gleichförmiger Bewegung ist. Newton formuliert das Relativitätsprinzip in der Form

„Die Bewegungen von Körpern in einem gegebenen Raum sind untereinander die gleichen, ob sich der Raum in Ruhe befindet oder ob er sich konstant auf einer geraden Linie bewegt.“

In der Newtonschen Mechanik ist die Beschreibung eines Systems unverändert unter Koordinatentransformation zwischen Inertialsystemen:

$$\begin{aligned}t' &= t \\x'^i &= x^i - v^i t\end{aligned}\tag{1.1}$$

Die Geschwindigkeiten verhalten sich unter der Transformation zwischen Koordinatensystemen additiv:

$$\frac{dx'^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt} - v^i \quad (1.2)$$

Probleme der Newtonschen Mechanik

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Nach (1.2) erwartet man, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht von der Relativgeschwindigkeit der emittierenden Quelle und des Beobachters abhängt. Das wird nicht beobachtet. Ein berühmtes Beispiel ist das Michelson-Morley Experiment (1887), siehe Abbildung 1.1. Es wird die Existenz eines ausgezeichneten Bezugssystems angenommen (Äther²), relativ zu dem sich Licht mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Am Ende zweier rechtwinklig zueinander angebrachten Arme mit Länge L befinden sich Spiegel, die Licht zurück zum Ursprung reflektieren. Bewegt sich diese Anordnung relativ zum Äther entlang der x -Achse mit Geschwindigkeit v , braucht das Licht für die Strecke vom Ursprung zum Spiegel und zurück für den Weg parallel zum Äther die Zeit

$$t_{\parallel} = \frac{2L}{c(1 - (\frac{v}{c})^2)}, \quad (1.3)$$

für den Weg senkrecht zum Äther die Zeit

$$t_{\perp} = \frac{2L}{c\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \quad (1.4)$$

Es wird aber beobachtet, dass Licht beide Wege in derselben Zeit zurücklegt. FitzGerald und Lorentz schlugen vor (1889, 1902), dass sich die Länge von Gegenständen parallel zum Äther so reduziert, dass beide Zeiten gleich werden (**Längenkontraktion**):

$$L_{\parallel} = L\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \quad (1.5)$$

Die mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes in beiden Richtungen wäre damit gleich, aber nicht gleich der Geschwindigkeit c im Ruhesystem des Äthers:

$$c' = c\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \quad (1.6)$$

Die Beobachtung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ließe sich dann durch eine **Zeitdilation**

$$t \rightarrow t' = \frac{t}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \quad (1.7)$$

erklären, die von Lorentz und anderen aber nicht als physikalischer Effekt angesehen wurde. In Einsteins Spezieller Relativitätstheorie (SRT) wird die Transformation der Zeit-Koordinate als Eigenschaft der Raumzeit angesehen.

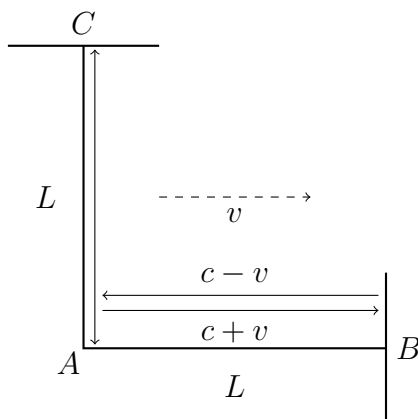


Abbildung 1.1: Skizze des Michelson Morley Experiments

Ein anderes interessantes Ergebnis ist das **Experiment von Fizeau** (1851), der für die Lichtgeschwindigkeit in einem bewegter Flüssigkeit mit Brechungsindex n und Geschwindigkeit v relativ zum Laborsystem das Ergebnis

$$c' = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (1.8)$$

erhalten hatte. Der unerwartete $1/n^2$ -Term wurde damals durch ein partielles „Mitschleppen“ des Äthers durch die Flüssigkeit erklärt. In der SRT erklärt sich der Effekt durch das Additionstheorem der Geschwindigkeiten

$$c' = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{vc}{nc^2}} \quad (1.9)$$

für $v \ll c/n$.

Beschreibung von masselosen Teilchen: Bestimmte Aspekte von Licht lassen sich in einem Teilchenbild durch masselose Teilchen (Photonen) beschreiben, deren Energie und Impuls mit der Kreisfrequenz ω (zur Wellenlänge λ) über die Formeln

$$E = \hbar\omega \quad p = \hbar\omega c \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (1.10)$$

zusammenhängen. Das ist mit der Newtonschen Energie-Impulsbeziehung

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \quad (1.11)$$

nicht verträglich. In der SRT wird die Energie-Impulsbeziehung zu

$$E_{\text{kin}} = c \sqrt{(cm)^2 + \vec{p}^2} \quad (1.12)$$

was einerseits im Grenzfall $m \rightarrow 0$ mit (1.10) verträglich ist, andererseits für $p \rightarrow 0$ die **Ruhe-Energie**

$$E_0 = mc^2 \quad (1.13)$$

ergibt. (siehe Kapitel 4)

Galilei-Invarianz und Maxwell-Theorie?

Durch Betrachten der Bewegungsgleichung eines Teilchen mit Ladung q in elektrischen und magnetischen Feldern

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{B} \right) \quad (1.14)$$

lässt sich erkennen, dass Elektrische und Magnetische Felder durch Transformationen zwischen Inertialsystemen vermischt werden. Durch eine Galilei-Transformation mit Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}|_{t_0}$ erhält man ein Bezugssystem I' , in dem das Teilchen zu einem gegebenen Zeitpunkt t_0 in Ruhe ist (ein sog. „instantanes Ruhesystem“). In diesem System wirkt auf das Teilchen zum Zeitpunkt t_0 die Kraft

$$\vec{F}' = q\vec{E}' \quad (1.15)$$

Damit die Lorentz-Kraft (1.14) Galilei-invariant sein kann, muss das elektrische Feld im instantanen Ruhesystem I' mit den Feldern im ursprünglichen System zusammenhängen:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (1.16)$$

Es zeigt sich, dass die Maxwell-Gleichungen nicht unter den Galilei-Transformationen (1.1) und (1.16) sowie einer analogen Transformation des Magnetfeldes invariant sind (siehe Abschnitt 2.2.4). In der SRT lautet das korrekte Transformationsverhalten der Felder (siehe Kapitel 5)

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{E})}{c} \\ \vec{B}' &= \gamma \left(\vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{\vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{B})}{c} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Überblick über die Vorlesung

- In Kapitel 2 diskutieren wir die Frage, ob neben den Galilei-Transformationen und den Lorentz-Transformationen noch andere Transformationen zwischen Inertialsystemen mit dem Relativitätsprinzip verträglich sind. Danach diskutieren wir ausführlich die Galilei-Invarianz und ihre Konsequenzen in der Newtonschen Mechanik, sowie die nicht-Invarianz der Maxwell-Gleichungen. Schließlich führen wir die Lorentz-Transformation ein und diskutieren einfache Konsequenzen.
- In Kapitel 3 zeigen wir, dass sich Symmetrien in der Physik durch den mathematischen Begriff der Gruppe beschreiben lassen und diskutieren die Gruppenstruktur der Galilei und Lorentz-Gruppen. Dies ist besonders im Hinblick auf die relativistische Formulierung der Quantenmechanik (Dirac Gleichung) wichtig.
- In Kapitel 4 wird die Newtonsche Mechanik so verallgemeinert, dass sie Lorentz-invariant ist. Dazu verwenden wir vier-dimensionale Raum-Zeit Vektoren und Tensoren. Diese Methoden bilden die Grundlage für die Allgemeine Relativitätstheorie.

- In Kapitel 5 werden die Maxwell-Gleichungen in vier-dimensionale Notation umgeschrieben und ihre Lorentz-Invarianz gezeigt. Die Grundlagen der Formulierung von relativistischen Feldtheorien durch das Variationsprinzip werden eingeführt, was sowohl für die Quantenfeldtheorie als auch für die Allgemeine Relativitätstheorie eine wichtige Grundlage ist.
- In Kapitel 6 wird die Beschreibung beschleunigter Bezugssysteme in der speziellen Relativitätstheorie diskutiert. Da nach dem Äquivalenzprinzip die Wirkung der Gravitation immer durch Übergang in ein beschleunigtes („freifallendes“) Bezugssystem kompensiert werden kann, bietet dies einen ersten Ausblick auf die Beschreibung von Gravitationsfeldern in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Kapitel 2

Das Relativitätsprinzip

2.1 Inertialsysteme und das Relativitätsprinzip

2.1.1 Transformationen zwischen Inertialsystemen

In diesem Kapitel werden wir die Frage untersuchen, welche **Koordinatentransformationen** des Inertialsystems I ein neues Inertialsystem I' definieren.

Sei \vec{x} ist der Vektor vom Ursprung zum Ort des Körpers. Unter Verwendung eines **orthonormierten Satzes von Einheitsvektoren** \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$ lässt sich der Vektor in **Komponentenform** schreiben:

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 = \sum_i x^i \vec{e}_i \equiv x^i \vec{e}_i \quad (2.1)$$

Im letzten Schritt wurde die **Einsteinsche Summenkonvention** eingeführt, bei der über gleiche Indizes summiert wird. Im Hinblick auf das unterschiedliche Verhalten bei Wechsel des Koordinatensystems, das uns gleich begegnen wird, verwenden wir obere Indizes für die Komponenten eines Vektors und untere Indizes um die Basisvektoren durchzunummerieren.

Ein **Ereignis** A wird durch die Angabe der Zeit t_A und der Koordinaten x_A^i definiert:

$$\begin{pmatrix} t_A \\ x_A^i \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Das **Bezugssystem** I , das von den Einheitsvektoren definiert wird, ist ein **Inertialsystem**, wenn die **Bahnkurve** eines Teilchen, das sich ohne Krafteinwirkung bewegt, von der Form

$$(t, x^i(t)) = \begin{pmatrix} t \\ a^i + v^i t \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

ist, mit Konstanten a^i, v^i .

Es gibt zwei Möglichkeiten, Koordinatentransformationen zu definieren:

Passive Koordinatentransformationen Der Vektor $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ bleibt unverändert. Man führt eine Transformation der Basisvektoren durch,

$$\vec{e}_i \rightarrow \vec{e}_{i'} \quad (2.4)$$

Die Komponenten des Vektors \vec{x} im neuen System ändern sich entsprechend,

$$x^i \rightarrow x^{i'}, \quad (2.5)$$

so dass der Vektor unverändert bleibt

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x^{i'} \vec{e}_{i'} \quad (2.6)$$

Aktive Koordinatentransformationen Die Vektoren selbst werden transformiert

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' \quad (2.7)$$

Dies gilt auch für die Basisvektoren:

$$\vec{e}_i \rightarrow \vec{e}_{i'} \quad (2.8)$$

Bezüglich der neuen Basis hat der Vektor \vec{x}' dieselben Komponenten x^i wie der ursprüngliche Vektor bezüglich der alten Basis:

$$\vec{x}' = x^i \vec{e}_{i'} \quad (2.9)$$

Drückt man den Vektor \vec{x}' bezüglich der alten Basis aus, werden die Komponenten transformiert:

$$\vec{x}' = x'^i \vec{e}_i \quad (2.10)$$

Das Relativitätsprinzip lässt sich sowohl für aktive als auch für passive Transformationen formulieren. In der aktiven Formulierung wird ein Experiment z.B. einmal im im Hafen ruhenden Schiff, einmal im relativ zum Hafen bewegten Schiff durchgeführt. In der passiven Formulierung ändern sich nur die zur Beschreibung des Experiments verwendeten Koordinaten. Im folgenden verwenden wir die passive Formulierung. Die **allgemeinste Transformation** der Koordinaten x^i und der Zeit hat die Form

$$\begin{aligned} t \rightarrow t' &= f(t, x^i) \\ x^i \rightarrow x^{i'} &= g^i(t, x^i) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nach der Definition des Inertialsystems, muss die **Bahnkurve in neuen Inertialsystem** wieder von der Form (2.3) sein, d.h.

$$g^i(t, a^i + v^i t) = a^i + v^i t' \quad (2.12)$$

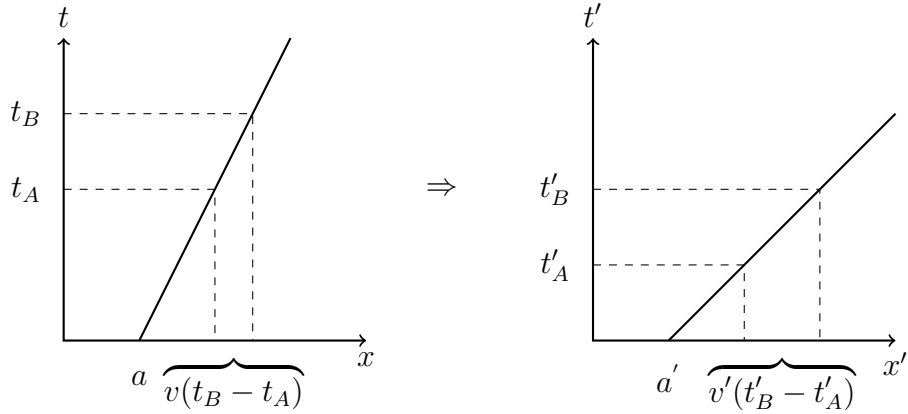


Abbildung 2.1: Raum-Zeit Diagramme für die Transformation der Bahnkurve eines geradlinig-gleichförmig bewegten Teilchens zwischen Inertialsystemen

Es ist jetzt hilfreich, die Bewegung (2.3) in einem **Raum-Zeit-Diagramm** zu betrachten (siehe Abbildung 2.1), in dem sie eine Gerade definiert, d.h. zwei Punkte $x_A \equiv x(t_A)$ und $x_B \equiv x(t_B)$ der Bahnkurve erfüllen die Bedingung

$$\Delta x_{AB}^i \equiv x_A^i - x_B^i = v^i(t_A - t_B) \equiv v^i \Delta t_{AB} \quad (2.13)$$

Die Forderung, dass die Bahnkurve auch in dem neuen Inertialsystem I' eine Gerade definiert,

$$\Delta x_{AB}^{i'} \equiv v^{i'} \Delta t'_{AB} \quad (2.14)$$

bedeutet, dass der Zusammenhang zwischen alten und neuen Raum-Zeit Koordinaten linear, genauer gesagt **affin** sein muss:

$$\begin{aligned} t \rightarrow t' &= L^0_0 t + L^0_i x^i - a^0 \\ x^i \rightarrow x^{i'} &= L^i_j x^j + L^i_0 t - a^i \end{aligned} \quad (2.15)$$

Im Vorgriff auf die spätere Notation wird hier für Zeitkomponenten der Index 0 verwendet. In Übereinstimmung mit der Konvention für die Basiszerlegung von Vektoren wird über gleiche obere und untere Indizes summiert. Die Transformation der zwei Raum-Zeit Punkte auf der Bahnkurve in die neuen Koordinaten ergibt

$$\begin{aligned} \Delta t'_{AB} &= L^0_0 \Delta t_{AB} + L^0_j \Delta x^j_{AB} = (L^0_0 + L^0_j v^j) \Delta t_{AB} \\ \Delta x^{i'}_{AB} &= L^i_j \Delta x^j_{AB} + L^i_0 \Delta t_{AB} = (L^i_j v^j + L^i_0) \Delta t_{AB} \end{aligned} \quad (2.16)$$

woraus man durch Auflösen der ersten Gleichung nach Δt_{AB} und einsetzen in die Zweite entnimmt, dass auch die Raum-Zeit Punkte in den neuen Koordinaten auf einer Gerade liegen:

$$\Delta x^{i'}_{AB} = v^{i'} \Delta t'_{AB} \quad (2.17)$$

mit der neuen Geschwindigkeit

$$v^{i'} = \frac{(L^i{}_j v^j + L^i{}_0)}{L^0{}_0 + L^0{}_j v^j} \quad (2.18)$$

Unter den Transformationen (2.15) gibt es drei spezielle Klassen:

- **Translationen** des Raum- und Zeit-Ursprungs:

$$t' = t - a^0 \quad x^{i'} = x^i - a^i \quad (2.19)$$

Invarianz unter Raum und Zeit-Translationen ist gleichbedeutend mit der **Homogenität** der Raumzeit (jeder Ort und jeder Zeitpunkt sind gleichberechtigt)

- **Drehungen** der Koordinatensysteme, die die Position des Ursprungs nicht verändern und die Zeitkoordinate unverändert lassen, d.h. $a^0 = a^i = 0$, $L^0{}_0 = 1$, $L^i{}_i = L^i{}_0 = 0$

$$t' = t \quad x^{i'} = R^i{}_j x^j \quad (2.20)$$

Invarianz der Gesetze der Physik unter Rotationen impliziert die **Isotropie** der Raumzeit. (jede Richtung ist gleichberechtigt)

- Sogenannte **Boosts**, d.h. Transformationen, bei denen sich der Koordinatenursprung $x_0^{i'}$ des neuen Systems gleichförmig mit der Geschwindigkeit v^i gegenüber dem des alten Systems bewegt:

$$x_0^i = v^i t \Leftrightarrow x_0^{i'} = 0 \quad (2.21)$$

Weiterhin gibt es sogenannte **diskrete Symmetrien**:

- **Raumspiegelungen** $x^i \rightarrow -x^i$
- **Zeitumkehr** $t \rightarrow -t$

Diese unterscheiden sich von den anderen Transformationen dadurch, dass sie nicht kontinuierlich von einem Parameter (z.b. Winkel oder Geschwindigkeit) abhängen und lassen sich getrennt von diesen betrachten.

2.1.2 Allgemeine Form von Transformationen zwischen Inertialsystemen

Die Form der Boosts lässt sich weitgehend einschränken, und es lässt sich zeigen, dass als Transformationen, die mit dem Relativitätsprinzip konsistent sind entweder die in der Newtonschen Mechanik realisierten Galilei Transformationen oder die Lorentz Transformationen der Speziellen Relativitätstheorie in Frage kommen [3].

Man argumentiert zunächst, dass die Transformation für einen Boost die Form

$$\begin{aligned} t' &= A(|\vec{v}|) t + B(|\vec{v}|) (\vec{v} \cdot \vec{x}) \\ x^{i'} &= C(|\vec{v}|) x^i + D(|\vec{v}|) (\vec{v} \cdot \vec{x}) v^i + E(|\vec{v}|) v^i t \end{aligned} \quad (2.22)$$

haben muss, d.h.¹

$$\begin{aligned} L^0_0 &= A, & L^0_i &= Bv^i \\ L^i_j &= C\delta^i_j + Dv^iv^j, & L^i_0 &= E v^i \end{aligned} \quad (2.23)$$

Diese Form folgt daraus, dass es keinen ausgezeichneten Vektor außer der Geschwindigkeit \vec{v} gibt. Für den Fall einer **Transformation in x -Richtung** vereinfacht sich (2.22) zu

$$\begin{aligned} t' &= At + Bvx \\ x' &= (C + Dv^2)x + Evt \\ y' &= Cy \\ z' &= Cz \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die Form der räumlichen Transformation für einen Boost in x -Richtung lässt sich durch **Isotropie** begründen: die Koordinatensysteme lassen sich so wählen, dass die y und z -Achsen der beiden Systeme zusammenfallen.

Die Transformation soll die Bedingung (2.25) erfüllen, d.h. **der Ursprung von I' bewegt sich von I aus gesehen mit der Geschwindigkeit v^i**

$$x^i_0 = v^i t \quad \Rightarrow \quad x^{i'}_0 = 0 = L^i_j x^j_0 + L^i_0 t = (L^i_j v^j + L^i_0) t \quad (2.25)$$

Diese Transformationen erfüllen also

$$L^i_0 = -L^i_j v^j \quad (2.26)$$

Die Bedingung (2.26) impliziert

$$C + Dv^2 = -E \equiv \gamma \quad (2.27)$$

wobei hier die in der SRT übliche Abkürzung γ eingeführt wurde.

Für das weitere Argument betrachten wir eine Transformation mit Geschwindigkeit in $x^1 \equiv x$ -Richtung, die sich als ausreichend herausstellt, um die Koeffizienten festzulegen. Für diesen Fall vereinfacht sich die Transformation zu

$$\begin{aligned} t' &= At + Bvx \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= Cy \\ z' &= Cz \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die nächste Bedingung, die an die Transformation gestellt wird, ist die sog. **Reziprozität**, d.h. die inverse Transformation von I' nach I soll durch die Transformation mit negativer Geschwindigkeit gegeben sein:

$$\begin{aligned} t &= At' - Bvx' \\ x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= Cy' \\ z &= Cz' \end{aligned} \quad (2.29)$$

¹Wir führen hier noch keine oberen und untere Indizes für Vektoren ein. Es gilt $v^i v^i = |\vec{v}|^2$.

Einsetzen der Gleichungen (2.29) in (2.28) liefert die Bedingungen

$$\begin{aligned} t' &= (A^2 + B\gamma v^2)t' + Bv(\gamma - A)x' \\ x' &= \gamma(\gamma + Bv^2)x' + \gamma v(\gamma - A)t' \\ y' &= C^2 y' \\ z' &= C^2 z' \end{aligned} \quad (2.30)$$

und damit

$$A = \gamma, \quad B = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma v^2}, \quad C = 1, \quad D = -\frac{E + C}{v^2} = -\frac{1 - \gamma}{v^2} \quad (2.31)$$

wobei hier die Möglichkeit von Raumspiegelungen ausgeschlossen wurde und daher das positive Vorzeichen für C gewählt wurde. Der allgemeinste mit dem Relativitätsprinzip verträgliche Boost in x -Richtung hat daher die Form

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2 v^2} vx \right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2.32)$$

wobei $\gamma(|v|)$ eine noch nicht bestimmte Funktion ist. Die Transformation in beliebige Richtung (2.22) nimmt die Form

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2 v^2} (\vec{v} \cdot \vec{x}) \right) \\ x'^i &= x^i - \frac{1 - \gamma}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{x}) v^i - \gamma v^i t \end{aligned} \quad (2.33)$$

an.

Um die Funktion $\gamma(|v|)$ zu bestimmen, muss ein weiteres Postulat eingeführt werden². An dieser Stelle unterscheiden sich die Newtonsche Mechanik und die SRT.

2.2 Galilei Invarianz

2.2.1 Galilei Transformationen

In der Newtonschen Mechanik wird zusätzlich zum Relativitätsprinzip gefordert, dass Raum und Zeit absoluten Charakter haben:

²Durch Hintereinanderausführung von drei Transformationen lässt sich zeigen, dass γ die Form $\gamma(v^2) = 1/\sqrt{1 + K v^2}$ haben muss, wobei K eine universelle Konstante ist (\Rightarrow Übung). Zur Bestimmung von K ist eine physikalisches Argument nötig.

Postulat. *Zeitliche Abstände von beliebigen Ereignissen und räumliche Abstände von gleichzeitig stattfindenden Ereignissen werden durch Transformationen zwischen Inertialsystemen nicht verändert,*

$$t_A - t_B = t'_A - t'_B \qquad x_A^i - x_B^i = x_A^{i'} - x_B^{i'}, \quad (2.34)$$

Das impliziert in den allgemeinen Transformationen (2.33) die Wahl

$$\gamma = 1. \quad (2.35)$$

Die Form der Boosts, die in diesem Zusammenhang (eigentliche) **Galilei Transformationen** genannt werden ist damit wie schon in (1.1) angegeben

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x'^i &= x^i - v^i t \end{aligned} \quad (2.36)$$

Einige Eigenschaften der Galilei Transformation lassen sich in einem Raum-Zeit-Diagramm veranschaulichen, siehe Abbildung 2.2.

- Die Position der t' -Achse im alten Koordinatensystem ist durch die Bedingung

$$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad t = x/v \quad (2.37)$$

gegeben, während die x' -Achse ($t' = 0$) mit der x -Achse zusammenfällt.

- Ereignisse, die in einem Inertialsystem zu verschiedenen Zeiten stattfinden, finden in allen Inertialsystemen zu verschiedenen Zeiten statt, also ist **die zeitliche Anordnung von Ereignissen absolut**. Gleichzeitige Ereignisse liegen in beiden Bezugssystemen auf Parallelen zur x/x' -Achse. In der Abbildung ist als Beispiel die „Einheitszeit“ $t = 1$ eingezeichnet.
- Da die Geschwindigkeit v nicht beschränkt ist, ist es immer möglich eine Galileitransformation zu finden, bei der ein Ereignis A bei (t_A, x_A) auf die t' -Achse abgebildet wird, d.h. das im neuen Inertialsystem das Ereignis A am selben Ort wie das Ereignis bei $(t, x) = (0, 0)$ stattfindet. Zusammen mit Translationen $x' = x - a$ gilt damit: **für zwei Ereignisse lässt sich immer ein Inertialsystem finden, an dem sie am selben Ort stattfinden.**

Die **allgemeinste Transformation zwischen Inertialsystemen** ist aus der eigentlichen Galilei Transformation, der Rotation der Koordinaten und der Raum-Zeit Translation zusammengesetzt:

$$\begin{aligned} t' &= t - a^0 \\ x'^i &= R^i_j x^j - v^i t - a^i \end{aligned} \quad (2.38)$$

Auch diese allgemeine Form der Transformation wird Galilei Transformation genannt.

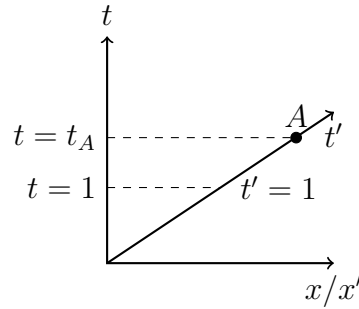


Abbildung 2.2: Raum-Zeit Diagramm mit den Koordinatenachsen der Inertialsysteme I und I' , die durch eine Galilei-Transformation (2.36) verbunden sind. Im gestrichelten System findet das Ereignis A am selben Ort statt, wie das bei $(t', x') = (0, 0)$

Drehungen

$$x^i \rightarrow R^i_j x^j \quad (2.39)$$

sind dadurch definiert, dass sie die **Länge und Winkel von Vektoren invariant lassen**. Das ist gleichbedeutend mit der **Invarianz des Skalarprodukts** unter Drehungen:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^i y^i \stackrel{!}{=} x'^i y'^i = (R^i_j x^j)(R^i_k y^k) \quad (2.40)$$

d.h.

$$R^i_j R^i_k = (R^T)^j_i R^i_k \stackrel{!}{=} \delta_{jk} \quad \text{mit } (R^T)^i_j = R^j_i \quad (2.41)$$

oder, in Matrixschreibweise

$$R^T R = \mathbb{I} \quad (2.42)$$

Matrizen mit der Eigenschaft (2.42) werden **orthogonal** genannt. Aus der Orthogonalitätsrelation (2.42) folgt (\Rightarrow Übungen)

$$\det R = \pm 1 \quad (2.43)$$

Transformationen mit $\det R = -1$ beinhalten Spiegelungen, die getrennt betrachtet werden können.

Eine Drehung lässt sich durch einen **Winkel** φ und eine **Drehachse** \vec{n} , die bei der Drehung unverändert bleibt, parametrisieren:

$$R^i_j(\varphi \vec{n}) n^j = n^i \quad (2.44)$$

Beispiele für Drehungen sind die Drehungen um die drei Koordinatenachsen:

$$R(\alpha_1 \vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (2.45a)$$

$$R(\alpha_2 \vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (2.45b)$$

$$R(\alpha_3 \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.45c)$$

Im folgenden werden die physikalische Konsequenzen der Galilei Invarianz genauer diskutiert.

2.2.2 Galilei Invarianz der Newtonschen Bewegungsgleichung

Wir diskutieren jetzt die Bedingungen, die aus der Forderung nach Galilei-Invarianz von Newton's Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}^i(t) = F^i(x_n^i, \dot{x}_n^i, t) \quad (2.46)$$

an die Kraft F^i folgen. Hier sind die x_n^i die Koordinaten von N Teilchen an den Orten \vec{x}_n . \vec{x} bezeichnet den Ort eines gegebenen unter den N Teilchen herausgegriffenen Teilchens, $\vec{x} \in \{\vec{x}_n\}$.

Zeit-Translationsinvarianz: $t \rightarrow t' = t - a^0$

Wegen

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt'} \quad (2.47)$$

ist die linke Seite von Newton's Gleichung invariant unter der Verschiebung des Zeit-Ursprungs. Daher muss für die rechte Seite gelten

$$F^i(x_n^i, \dot{x}_n^i, t) = F^i(x_n^i, \dot{x}_n^i, t - a^0) \quad (2.48)$$

d.h. die Kraft darf nicht explizit von der Zeit abhängen.

Translationsinvarianz $x_n^i \rightarrow x_n^i - a^i$. Da a^i konstant ist, bleibt die linke Seite wieder invariant. Für die Kraft muss gelten

$$F^i(x_n^i, \dot{x}_n^i) = F^i(x_n^i - a^i, \dot{x}_n^i) \quad (2.49)$$

Dies ist der Fall, wenn die Kraft nur von Relativkoordinaten abhängt

$$F^i = F^i((x_n^i - x_m^i), \dot{x}_n^i) \quad (2.50)$$

Eigentliche Galilei Transformationen $\dot{x}_n^i \rightarrow \dot{x}_n^i - v^i$

$$F^i((x_n^i - x_m^i), \dot{x}_n^i, t - a^0) = F^i((x_n^i - x_m^i), \dot{x}_n^i - v^i, t) \quad (2.51)$$

Dies ist der Fall, wenn die Kraft auch nur von Relativgeschwindigkeiten abhängt:

$$F^i = F^i((x_n^i - x_m^i), (\dot{x}_n^i - \dot{x}_m^i)) \quad (2.52)$$

Rotationen Unter einer Rotation $x_n^i \rightarrow R^i_j x_n^j$ ändert sich die linke Seite der Newton-Gleichung, da auch die Beschleunigung rotiert wird. Die Kraft muss also die Bedingung

$$F^i((x_n^i - x_m^i), (\dot{x}_n^i - \dot{x}_m^i)) = R^i_j F^j(R^j_k (x_n^k - x_m^k), R^j_k (\dot{x}_n^k - \dot{x}_m^k)) \quad (2.53)$$

erfüllen. In diesem Fall spricht man von „Kovarianz“ oder „Forminvarianz“ der Bewegungsgleichung, da sich beide Seiten gleichermaßen unter der Rotation verhalten. Die Bedingung (??) ist z.B. gewährleistet, wenn die Kraft als Gradient einer skalaren (d.h. rotationsinvarianten) Funktion V geschrieben werden kann:

$$F^i(x_n^i - x_m^i) = \frac{\partial}{\partial x^i} V(x_n^i - x_m^i) \quad (2.54)$$

Die Galilei-Invarianz der Newtonschen Mechanik gilt für **abgeschlossene Systeme**. Betrachtet man nur die Bewegung eines Untersystems von Teilchen in von außen vorgegebenen Kräften gilt die Galilei-Invarianz nicht für das Untersystem:

- Bewegung eines Satelliten im Schwerfeld der Sonne und Erde: der Satellit bewegt sich unter dem Einfluss einer Orts- und Zeit-abhängigen Kraft. Für das Gesamtsystem Satellit+Erde+Sonne gilt (bei Vernachlässigung anderer Planeten etc.) die Galilei Invarianz.
- Eine Reibungskraft $F^i = -\gamma \dot{x}^i$ für ein Teilchen, das sich auf einem Tisch bewegt ist nicht Galilei-Invariant, da sie nur im Ruhesystem des Tisches diese Form annimmt. Das Gesamtsystem Teilchen+ Moleküle des Tisches ist wieder Galilei invariant.

2.2.3 Erhaltungsgrößen und Noether Theorem

Wir betrachten ein System von N Punktteilchen, das im Rahmen der Langrange-Mechanik durch **verallgemeinerte Koordinaten** q^a mit $a = 1, \dots, 3N$ beschrieben wird. Die Dynamik wird durch eine **Lagrangefunktion** $L(v^a, q^a, t)$ beschrieben, die von den verallgemeinerten Koordinaten und den zugehörigen **verallgemeinerten Geschwindigkeiten** $v^a = \dot{q}^a$ abhängt. Die Bewegungsgleichungen folgen aus den **Lagrange-Gleichungen**

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = \frac{d}{dt} p^a - \frac{\partial L}{\partial q^a} \quad (2.55)$$

Hier wurde der **kanonisch-konjugierte Impuls** zur Variable q^a eingeführt:

$$p^a = \frac{\partial L}{\partial v^a} \quad (2.56)$$

Betrachte eine **infinitesimale Koordinatentransformation**, die von einem Parameter ϵ parametrisiert wird:

$$\begin{aligned} q^a(t) &\rightarrow q^{a'}(t, \epsilon) = q^a(t) + \epsilon h^a(q^a, t) \\ v^a(t) &\rightarrow v^{a'}(t, \epsilon) = v^a(t) + \epsilon \frac{dh^a(q^a, t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Man sagt, eine Lagrangefunktion ist **invariant** unter einer Transformation, wenn gilt

$$0 = \frac{dL'}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} \equiv \frac{d}{d\epsilon} L(q^{a'}(t, \epsilon), v^{a'}(t, \epsilon), t)|_{\epsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial q^a} h^a + \frac{\partial L}{\partial v^a} \frac{dh^a}{dt} \quad (2.58)$$

Die Lagrangefunktion ist aber nur bis auf Addition einer totale Zeitableitung einer Funktion $\chi(q^a, t)$ eindeutig, da diese die **Wirkung unverändert lässt**:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(v^a, q^a, t) + \frac{d}{dt} \chi(q^a, t) \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(v^a, q^a, t) + \chi(q^a, t)|_{t_1}^{t_2} \quad (2.59)$$

Da bei der Variation die Zeiten $t_{1,2}$ und die Koordinaten an den Randpunkten $q^a(t_{1/2})$ festgehalten werden, ist der Zusatzterm eine Konstante und fällt beim Variieren der Koordinaten heraus. Die Transformation $L \rightarrow L + \frac{d}{dt} \chi$ wird **Eichtransformation** genannt. Daher ist die **Wirkung invariant**, wenn die Lagrangefunktion die Bedingung

$$\frac{dL'}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} \chi(q^a, t) \quad (2.60)$$

erfüllt.

Theorem. (Noether) *Ist eine Wirkung invariant unter einer Transformation (2.57) sind die Größen*

$$Q_h = h^a \frac{\partial L}{\partial v^a} - \chi \quad (2.61)$$

zeitlich konstant:

$$\frac{dQ_h}{dt} = 0 \quad (2.62)$$

Beweis: Unter Verwendung der Lagrange-Gleichung bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{dQ_h}{dt} &= h^a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^a} + \left(\frac{d}{dt} h^a \right) \frac{\partial L}{\partial v^a} - \frac{d\chi}{dt} \\ &= h^a \frac{\partial L}{\partial q^a} + \left(\frac{d}{dt} h^a \right) \frac{\partial L}{\partial v^a} - \frac{d\chi}{dt} \\ &= \frac{dL'}{d\epsilon} - \frac{d\chi}{dt} = 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

In den folgenden Beispielen werden kartesische Koordinaten x_n^i von N Partikeln (verwendet) und eine Lagrangefunktion der Form

$$L(\dot{x}_n^i, x_n^i) = \frac{1}{2} \sum_n m_n (\dot{x}_n^i)^2 - V(x_n^i - x_m^i) \quad (2.64)$$

betrachtet. Hier wurde ein Potential angesetzt, das nur von den relativ-Abständen der Partikeln abhängt und rotationsinvariant ist.

Translationen \Rightarrow Impulserhaltung :

$$x_n^i \rightarrow x_n^i - \epsilon a^i \Rightarrow h_n^i = -a^i \quad (2.65)$$

Die Lagrangefunktion ist invariant ($\chi = 0$), die zugehörige Erhaltungsgröße ist der **Gesamtimpuls** in \vec{a} -Richtung:

$$Q_a = \sum_n a^i \frac{\partial L}{\partial v_n^i} = \sum_n (\vec{a} \cdot \vec{p}_n) \quad (2.66)$$

Rotationen \Rightarrow Drehimpulserhaltung : Aus der expliziten Form der Drehungen (2.45) bekommt man die infinitesimale Transformation z.B. für eine Drehung um die z -Achse:

$$x_n^i \rightarrow R_j^i(\epsilon \vec{e}_3) x_n^j \quad \text{mit} \quad R_j^i(\epsilon \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

$$\Rightarrow h_{n,3}^i = -\epsilon^{ij3} x_n^j$$

und analog für Rotationen um die beiden anderen Koordinatenachsen:

$$h_{n,k}^i = -\epsilon^{ijk} x_n^j \quad (2.68)$$

Die zugehörige Erhaltungsgröße ist der **Gesamtdrehimpuls** in k -Richtung:

$$L^k \equiv Q_{h_k} = - \sum_n \epsilon^{ijk} x_n^j \frac{\partial L}{\partial v_n^i} = \sum_n (\vec{x}_n \times \vec{p}_n)^k \quad (2.69)$$

Eigentliche Galilei-Transformationen:

$$x_n^{i'} = x_n^i + \epsilon h_n^i, \quad \dot{x}_n^{i'} = \dot{x}_n^i + \epsilon \dot{h}_n^i, \quad h_n^i = -v^i t \quad (2.70)$$

Hier ist die Wirkung invariant, nicht die Lagrangefunktion selbst:

$$\begin{aligned} \frac{dL'}{d\epsilon} &= \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n^i} \dot{h}_n^i = - \sum_n m_n \dot{x}_n^i v^i \\ &= -v^i \frac{d}{dt} \sum_n m_n x_n^i \equiv \frac{d\chi(x_n^i)}{dt} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Die Eichfunktion χ lässt sich durch die **Schwerpunktskoordinate**

$$R^i = \frac{\sum_n m_n x_n^i}{M}, \quad M = \sum_n m_n \quad (2.72)$$

ausdrücken:

$$\chi = -M(\vec{v} \cdot \vec{R}) \quad (2.73)$$

Die zugehörigen Erhaltungsgrößen sind

$$Q_{v^i} = -v^i \left(\sum_n p_n^i t - MR^i \right) = -v^i M(\dot{R}t - R) \quad (2.74)$$

Die Konstanz dieser Größen besagt, dass sich der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems mit konstanter Geschwindigkeit bewegt:

$$\frac{dQ_{v^i}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{R} = 0 \quad (2.75)$$

Dieses Ergebnis folgt aber schon aus der Konstanz des Gesamtimpulses, so dass sich hier keine neue Information ergibt.

Die Zeit-Translation $t' = t - a^0$ ist nicht von der Form (2.57), die nur Transformationen der Raumkoordinaten zulässt. Das Noether-Theorem lässt sich auf Transformation der Zeitkoordinate erweitern [2], was hier aber nicht diskutiert werden soll. Die Herleitung der Konstanz der Energie für nicht explizit zeitabhängige Lagrangefunktionen findet man in Standard Lehrbüchern über Mechanik.

2.2.4 Galilei Invarianz und Elektrodynamik

Transformation von \vec{E} und \vec{B} Feldern?

Wir hatten schon gesehen, dass die Galilei-Invarianz der Lorentz-Kraft

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{B} \right) \quad (2.76)$$

eine Galilei Transformation (1.16) erfordert, die elektrische und magnetische Felder mischt:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.77)$$

Es stellt sich die Frage, ob die Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2.78a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.78b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.78c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.78d)$$

mit den Galilei-Transformationen kompatibel sind. Dies wird in den Übungen weitergehend diskutiert.

Hier geben wir ein einfaches Argument, das auf Widersprüche zu der Galilei-Invarianz der Lorentz-Kraft führt. Betrachte einen **Draht auf der z -Achse, der im System I homogen geladen ist (Ladungsdichte ρ) und keinen Strom führt**, d.h. die Ladungsträger sind im System in Ruhe. Die elektrischen und magnetischen Felder sind dann in Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$:

$$I : \quad \vec{E} = \frac{2\rho}{r} \vec{e}_r, \quad \vec{B} = 0 \quad (2.79)$$

Betrachte nun ein **System I' , in dem sich die Ladungsträger mit der Geschwindigkeit $-v$ entlang der z -Achse bewegen**, was eine Stromdichte

$$\vec{j} = -\vec{v}\rho \quad (2.80)$$

erzeugt. Das elektrische Feld sollte nach (1.16) unverändert sein, während der Strom nach dem Ampereschen Gesetz ein Magnetfeld erzeugt:

$$I' : \quad \vec{E}' = \frac{2\rho}{r} \vec{e}_r, \quad \vec{B}' = -\frac{2\rho v}{r c} \vec{e}_\phi \quad (2.81)$$

Dieses Verhalten entspricht einer **Transformation des Magnetfeldes**

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E} \quad (2.82)$$

da in obigem Beispiel:

$$-\frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E} = \frac{2\rho}{r} \left(-\frac{v}{c}\right) \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}_{=\vec{e}_\phi} = \vec{B}' \quad (2.83)$$

Andererseits ist die Kombination der Transformationen (1.16) und (2.82) nicht mit der Galilei-Invarianz der Lorentzkraft verträglich

$$\begin{aligned} \vec{F}' &= q \left(\vec{E}' + \frac{1}{c} \dot{\vec{x}}' \times \vec{B}' \right) = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{c} (\dot{\vec{x}} - \vec{v}) \times \left(\vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E} \right) \right) \\ &= \vec{F} - \frac{1}{c^2} (\dot{\vec{x}} - \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{E}) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Die Zusatzterme sind von der Ordnung $(v/c)^2$, so dass die bisher gefundenen Transformationsgesetze nur näherungsweise für kleine Geschwindigkeiten richtig sein können. Dies wird auch ersichtlich, wenn wir in obigem Beispiel die Transformation $I \rightarrow I'$ mit Geschwindigkeit $-v$ betrachten:

$$\vec{E}' \rightarrow \vec{E}' - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}' = \frac{2\rho}{r} \left(\vec{e}_r + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_\phi}_{=-\vec{e}_r} \right) = \vec{E} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right) \quad (2.85)$$

Diese Transformation hat auf \vec{E}' also nicht die Wirkung einer inversen Transformation, was der Reziprozität widerspricht, die bei der Konstruktion der Transformation zwischen Inertialsystemen gefordert wurde. Die richtigen Transformationsgesetze in allen Ordnungen in c lassen sich erst durch die Lorentztransformation finden.

Ausbreitung von Wellen

Die Wellengleichung für ein Feld ϕ ist durch

$$\left(\partial_i^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\phi(\vec{x}, t) \quad (2.86)$$

gegeben. Die **ebenen Wellen** sind Lösungen der Form

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})) + \text{c.c.} \quad (2.87)$$

mit dem Zusammenhang von **Kreisfrequenz** ω und **Wellenvektor** \vec{k}

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.88)$$

Die Welle breitet sich mit der Geschwindigkeit c in Richtung von \vec{k} aus, da das Argument der Exponentialfunktion für $\vec{k} \cdot \vec{x}/|\vec{k}| = ct$ konstant ist.

Unter einer speziellen Galilei Transformation

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x'^i &= x^i - v^i t \end{aligned} \quad (2.89)$$

transformieren sich die partiellen Ableitungen nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \partial_i &= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \partial_{j'} = \partial_{i'} \\ \partial_t &= \frac{\partial t'}{\partial t} \partial_{t'} + \frac{\partial x^{j'}}{\partial t} \partial_{j'} = \partial_{t'} - v^i \partial_{i'} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Das sieht man alternativ durch explizites Einsetzen der Galilei Transformation:

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}', t')}{\partial t} = \frac{\partial \phi(\vec{x} - \vec{v}t, t)}{\partial t} = \frac{\partial \phi(\vec{x}', t')}{\partial t'} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}') \phi(\vec{x}', t')$$

Die Wellengleichung ist daher nicht Galilei invariant, sondern hat im neuen Inertialsystem die Form

$$\left(\partial_{i'}^2 - \frac{1}{c^2} \left(\partial_{t'} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla}'\right)^2\right) \phi(\vec{x}', t') = 0 \quad (2.91)$$

Mit einem Ebenen-Wellen Ansatz bekommt man die Bedingung

$$\vec{k}'^2 - \frac{1}{c^2} \left(\omega' - (\vec{v} \cdot \vec{k}')\right)^2 = 0 \quad (2.92)$$

Für den Fall, dass $\vec{v} \parallel \vec{k}'$ ist, findet man daraus

$$k' = \pm \frac{\omega'}{c \pm v} \quad (2.93)$$

d.h. die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird durch die Galilei Transformation um v geändert. Es gibt also ein ausgezeichnetes Bezugssystem, in dem sich die Welle mit c ausbreitet, was dem Relativitätsprinzip widerspricht.

2.3 Lorentz Invarianz

2.3.1 Lorentz Transformation

Wir hatten für die allgemeinste Form eines “Boosts” zwischen Koordinatensystemen die Form (2.33) gefunden:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2 v^2} (\vec{v} \cdot \vec{x}) \right) \\ x'^i &= x^i - \frac{1 - \gamma}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{x}) v^i - \gamma v^i t \end{aligned} \quad (2.94)$$

wobei $\gamma(v^2)$ eine noch zu bestimmende Funktion ist. In der SRT wird sie durch das Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit festgelegt:

Postulat. *Licht breitet sich in jedem Inertialsystem mit der Geschwindigkeit $c = 2,9979 \dots \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ aus.*

Dieses Postulat impliziert, dass die Lichtgeschwindigkeit sowohl von der Geschwindigkeit der emittierenden Lichtquelle und des Beobachters, als auch von der Raumrichtung invariant ist.

Zur Bestimmung von γ betrachten wir die Transformation in x -Richtung (2.32) für die Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit $x(t) = ct$. Nach dem Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gilt auch $x'(t') = ct'$. Damit bekommt man die Bedingungen:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2 v^2} vx \right) = \gamma t \left(1 + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2} \frac{c}{v} \right) \\ x' &= \gamma(x - vt) = \gamma t(c - v) \stackrel{!}{=} ct' \end{aligned} \quad (2.95)$$

Eliminieren von t' führt zu der Bedingung

$$\gamma^2 \left(1 - \frac{v}{c} \right) \stackrel{!}{=} \left(\gamma^2 + (1 - \gamma^2) \frac{c}{v} \right) \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 1 \quad (2.96)$$

und damit zu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (2.97)$$

Verwendet man die Identität

$$1 - \gamma^2 = -\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = -\beta^2 \gamma^2 \quad (2.98)$$

lässt sich die allgemeine Form der Lorentztransformation schließlich in der Form

$$\begin{aligned} x^{0'} &\equiv ct' = \gamma \left(x^0 - (\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \right) \\ x'^i &= x^i + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} (\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \beta^i - \gamma \beta^i x^0 \end{aligned} \quad (2.99)$$

schreiben.

Für eine Lorentz-Transformation in x -Richtung bekommt man

$$\begin{aligned}x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x) \\x' &= \gamma(x - \beta x^0) \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}\tag{2.100}$$

2.3.2 Eigenschaften der Lorentz-Transformation

Invariantes Raum-Zeitintervall

Die Bedingung, dass Lichtstrahlen sich in allen Inertialsystemen mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreiten, bedeutet, dass aus der Relation

$$\frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^i(t)}{dt} = c^2\tag{2.101}$$

die analoge Relation im neuen System folgt

$$\frac{dx^{i'}(t')}{dt'} \frac{dx^{i'}(t')}{dt'} = c^2\tag{2.102}$$

Die Bedingung lässt sich äquivalent formulieren:

$$(dx^0)^2 - (dx^i)^2 = 0, \quad \Rightarrow (dx^{0'})^2 - (dx^{i'})^2 = 0\tag{2.103}$$

Für die Transformation in x -Richtung lässt sich das leicht überprüfen:

$$\begin{aligned}(dx^{0'})^2 - (dx')^2 &= \gamma^2 \left[(dx^0 - \beta dx)^2 - (dx - \beta dx^0)^2 \right] \\&= \gamma^2 (1 - \beta^2) (dt^2 - dx^2) = (dt^2 - dx^2)\end{aligned}\tag{2.104}$$

Es gilt also sogar die noch stärkere **Invarianz des vierdimensionalen Raum-Zeitintervalls**:

$$(dx^0)^2 - (dx^i)^2 = (dx^{0'})^2 - (dx^{i'})^2\tag{2.105}$$

auch wenn dieses Intervall nicht null ist. (Beweis für eine allgemeine Lorentz-Transformation \Rightarrow Übung)

Vierervektoren und Skalarprodukt

Die Invarianz des Raum-Zeit Intervalls (2.104) lässt sich kompakter durch die Einführung von **Vierervektoren** formulieren:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}.\tag{2.106}$$

Die Vektoren x^μ spannen den so-geannten **Minkowski-Raum** auf. Hier römische Indizes laufen von 1, ..., 3, Griechische Indizes von 0, ..., 3. Das Raum-Zeit Intervall lässt sich dann mit Hilfe eines "Pseudo-Skalarprodukts" von Vierervektoren

$$(x \cdot y) \equiv x^0 y^0 - x^i y^i \quad (2.107)$$

schreiben als

$$\Delta s_{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 \quad (2.108)$$

Es gilt

$$(x_A \cdot x_B) = \frac{1}{2} (x_A^2 + x_B^2 - (x_A - x_B)^2) \quad (2.109)$$

woraus die Invarianz des Skalarprodukts unter Lorentztransformationen folgt:

$$(x' \cdot y') = (x \cdot y) \quad (2.110)$$

mit

$$x^{\mu'} = L^\mu{}_{\nu'} x^\nu \quad (2.111)$$

Darstellung im Raum-Zeitdiagramm

Bei der Darstellung der neuen Koordinatenachsen in einem Raum-Zeit-Diagramm des alten Koordinatensystems ist die t' -Achse durch dieselbe Bedingung wie bei der Galilei-Transformation gegeben:

$$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^0 = x/\beta \quad (2.112)$$

Allerdings wird jetzt auch die Raumachse transformiert:

$$x^{0'} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^0 = \beta x \quad (2.113)$$

Die **Normierung der Koordinaten** ergibt sich aus der Invarianz des Raumzeitintervalls:

$$(x^0)^2 - (x^i)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{i'})^2 \quad (2.114)$$

Die Einheits-Zeitkoordinate $(x^{0'}, x') = (1, 0)$ im neuen Bezugssystem liegt also auf dem Schnittpunkt der x'^0 -Achse mit der Kurve

$$(x^0)^2 - (x^i)^2 = 1 \quad (2.115)$$

bestimmt, die Einheits-Raumkoordinate $(x^{0'}, x') = (0, 1)$ auf dem Schnittpunkt der x' -Achse mit der Kurve

$$(x^0)^2 - (x^i)^2 = -1 \quad (2.116)$$

Dies sind Hyperbeln, siehe Abbildung 2.3.

Die Transformation der Koordinatenachsen lässt sich auch diagrammatikalisch konstruieren:

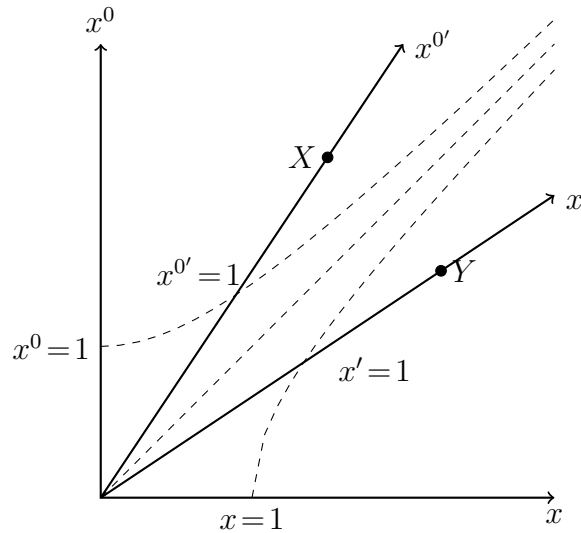


Abbildung 2.3: Raum-Zeit Diagramm mit den Koordinatenachsen der Inertialsysteme I und I' , die durch eine Lorentz-Transformation (2.100) verbunden sind. Im gestrichelten System findet das Ereignis X am selben Ort statt, wie das bei $(t', x') = (0, 0)$, das Ereignis Y zur selben Zeit.

- Die Steigung der $x^{0'}$ -Achse (im System I gezeichnet) ergibt sich (wie bei der Galilei-Transformation) daraus, dass sich der Koordinatenursprung mit der Geschwindigkeit v bewegt.
- Die x' -Achse ist definiert durch alle Ereignisse, die in I' gleichzeitig zum Ereignis bei $(x^0, x) = (0, 0)$ stattfinden, siehe Abbildung 2.4 Den Vorfaktor γ muss man in dieser Herangehensweise über die Konstanz des Raum-Zeitintervalls bestimmen.

Details zu dieser Konstruktion:

- „Gleichzeitigkeit“ lässt sich durch Synchronisierung von Uhren an verschiedenen Orten mittels Lichtstrahlen definieren: Im System I ist die t -Achse die Weltlinie eines im Ursprung ruhenden Teilchens. Ein Lichtstrahl, der bei t_1 von einem solchen Teilchen ausgesendet wird, werde bei x zum Zeitpunkt $\bar{t} = t_1 + x/c$ reflektiert und kommt zum Zeitpunkt $t_2 = t_1 + 2x/c$ wieder am Ursprung an. Das Ereignis findet also am Ort $x = \frac{c}{2}(t_2 - t_1)$ zur Zeit $t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ statt. Alle Ereignisse mit demselben Wert der Zeit t finden gleichzeitig statt. Im System I' finden gerade alle Ereignisse auf der x -Achse gleichzeitig zur Zeit $t = 0$ statt.
- Die Bahnkurve eines im System I' im Koordinatenursprung ruhendes Teilchen ist durch die t' Achse gegeben. Ein zum Zeitpunkt t'_1 ausgesendetes Lichtsignal bewegt sich wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit auf einer Geraden mit 45° Steigung. Wird das Signal bei x' zum Zeitpunkt t' reflektiert und kommt bei t'_2 wieder bei dem Teilchen im Ursprung an, gilt wieder $t' = \frac{1}{2}(t'_1 + t'_2)$. Die x' -Achse ist definiert als Ort aller Ereignisse mit $t' = 0$.

- **Raumartig getrennte Ereignisse** können nicht durch Signale, die sich mit Lichtgeschwindigkeit oder langsamer ausbreiten, verbunden werden. Es ist möglich, eine Lorentztransformation in ein System zu finden, in dem A und B gleichzeitig stattfinden. In Abbildung 2.3 ist das Ereignis Y raumartig vom Ursprung getrennt.

Geschwindigkeitsaddition

Für die Transformation der Geschwindigkeit unter einer Transformation der Form (2.15) haben wir das Ergebnis (2.18) erhalten³:

$$v^{i'} = \frac{(L^i_j v^j + L^i_0)}{L^0_0 + L^0_j v^j} \quad (2.119)$$

Mit den für die Lorentz-Transformation gefundenen Werten⁴

$$\begin{aligned} L^0_0 &= \gamma, & L^0_j &= -\gamma \frac{\beta_j}{c} \\ L^i_j &= \delta^i_j + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \beta^i \beta_j & L^i_0 &= -\gamma c \beta^i \end{aligned} \quad (2.120)$$

bekommt man das **Additionstheorem der Geschwindigkeiten**:

$$\begin{aligned} v^{i'} &= \frac{(L^i_j v^j + L^i_0)}{L^0_0 + L^0_j v^j} \\ &= \frac{(v^j - \gamma c \beta^j) + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \beta^j (\vec{v} \cdot \vec{\beta})}{\gamma(1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{v})/c)} \end{aligned} \quad (2.121)$$

Dieses Ergebnis wird übersichtlicher, wenn man die Geschwindigkeit v^i in Komponenten parallel und orthogonal zu β^i zerlegt:

$$\begin{aligned} v^i &= v_{\parallel}^i + v_{\perp}^i, & \vec{\beta} \cdot \vec{v}_{\perp} &= 0 \\ v_{\parallel}^i &= \beta^i \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta}}{\beta^2} \end{aligned} \quad (2.122)$$

Damit findet man

$$v^{i'} = \frac{v_{\perp}^i - \gamma c \beta^i + v_{\parallel}^i \left(1 + \overbrace{\frac{\gamma^2 \beta^2}{1+\gamma}}^{=-(1-\gamma)}\right)}{\gamma(1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{v})/c)} \quad (2.123)$$

³Die Geschwindigkeit v ist hier nicht dieselbe, die im Parameter des Boosts, β auftritt.

⁴Beachte, dass in (2.18) noch nicht die Koordinate $x^0 = ct$ eingeführt wurde, d.h. es sind beim Vergleich mit (2.99) noch geeignete Faktoren c einzufügen.

wo die Identität (2.98) verwendet wurde. Für die Komponenten parallel und orthogonal zum Boost findet man

$$v_{\parallel}^{i'} = \frac{v_{\parallel}^i - c\beta^i}{(1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{v})/c)} \quad (2.124a)$$

$$v_{\perp}^{i'} = \frac{v_{\perp}^i}{\gamma(1 - (\vec{\beta} \cdot \vec{v})/c)} \quad (2.124b)$$

Für zwei Spezialfälle vereinfacht sich das Ergebnis weiter:

$$\vec{v} \parallel \vec{\beta} : \quad v^{i'} = \frac{v^j - \beta^i}{(1 - |\vec{\beta}||\vec{v}|/c)} \quad (2.125)$$

$$\vec{v} \perp \vec{\beta} : \quad v^{i'} = \frac{v^j - \gamma c\beta^i}{\gamma} \quad (2.126)$$

Lichtgeschwindigkeit als Grenzggeschwindigkeit

In der Konstruktion der Lorentztransformation wurde verwendet, dass sich Licht immer mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, es ergibt sich aus den Ergebnissen aber sogar, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Grenzggeschwindigkeit ist, d.h. bewegen sich Objekte in einem Inertialsystem mit $v < c$ gilt dies in allen Inertialsystemen.

- Damit der Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ reell bleibt, muss $\beta < 1$ gelten.
- Aus dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten folgt, dass für $|\vec{v}| < c$ und $|\vec{\beta}| < 1$ immer gilt, dass $|\vec{v}'| < c$:

$$\frac{|\vec{v}'|^2}{c^2} = 1 - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(1 - \beta^2)}{(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta}}{c})^2} \begin{cases} < 1 & |\vec{v}|/c < 1, |\vec{\beta}| < 1 \\ = 1 & |\vec{v}|/c = 1 \end{cases} \quad (2.127)$$

Damit ist streng-genommen noch nicht gezeigt, dass es keine Signale gibt, die sich in allen Inertialsystemen mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten. Dies würde aber zu Problemen mit der Kausalität führen:

- Gäbe es Signale, die sich schneller als Licht ausbreiten, wäre es möglich Signale zwischen raumartig getrennten Ereignissen auszutauschen. Es ließen sich dann Bezugssysteme finden, in denen die zeitliche Anordnung von A und B unterschiedlich ist, d.h. die Kausalität wäre verletzt.

Beweis von (2.127):

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(1 - \vec{\beta}^2)}{(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta}}{c})^2} &= \frac{(c - \vec{v} \cdot \vec{\beta})^2 - (c^2 - v^2)(1 - \vec{\beta}^2)}{(c - \vec{v} \cdot \vec{\beta})^2} \\
 &= \frac{(\vec{v} \cdot \vec{\beta})^2 - 2c(\vec{v} \cdot \vec{\beta}) + (\vec{v}^2 + c^2\vec{\beta}^2) - v^2\vec{\beta}^2}{(c - \vec{v} \cdot \vec{\beta})^2} \\
 &= \frac{\beta^2 v_{\parallel}^2 - 2c\beta v_{\parallel} + c^2\beta^2 + (1 - \beta^2)(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)}{(c - \vec{v} \cdot \vec{\beta})^2} \\
 &= \frac{(v_{\parallel} - c\beta)^2 + \gamma^{-2}v_{\perp}^2}{c(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\beta}}{c})^2} = \frac{1}{c^2}((v'_{\parallel})^2 + (v'_{\perp})^2) = \frac{v'^2}{c^2}
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

2.3.3 Längenkontraktion und Zeitdilatation

Längenkontraktion

Betrachte die folgende Situation:

- ein Lineal ruhe im Inertialsystem I' , in dem es die Länge L hat.
- das System I' bewegt sich parallel zu dem Lineal mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem Inertialsystem I
- Die Anfangs- und Endpunkte des Lineals in I' seien x'_A und x'_B mit

$$\Delta x'_{BA} = x'_B - x'_A = L \tag{2.129}$$

- Zum Zeitpunkt t wird in I die Länge des Gegenstandes gemessen.

Dann erhält man den Zusammenhang ($x_A^0 = x_B^0 = t$).

$$L = (x'_B - x'_A) = \gamma [(x_B - \beta x_B^0) - (x_A - \beta x_A^0)] = \gamma \Delta x_{BA} \Rightarrow \Delta x_{BA} = \frac{1}{\gamma} L < L \tag{2.130}$$

Die Länge des bewegten Gegenstandes in I ist also kleiner als die Länge in seinem Ruhesystem.

Bemerkungen:

- die Länge wird an einem festen Zeitpunkt in I gemessen, d.h. nicht an einem festen Zeitpunkt im Ruhesystem des Körpers. Dies löst auch Schein-Paradoxien wie beim "relativistischen Einparken" auf: in jedem Bezugssystem gibt es eine konsistente Beschreibung der Reihenfolge der Ereignisse, die Reihenfolge ist aber in den Bezugssystemen anders.
- Das optische Erscheinungsbild eines relativistisch bewegten Körpers wird noch davon beeinflusst, dass das Licht unterschiedliche Laufzeiten von verschiedenen Orten auf dem Körper bis zum Beobachter benötigt. Ein bewegter Würfel erscheint z.B. rotiert anstatt gestaucht (bei einem großen Abstand verglichen mit seiner Kantenlänge), siehe Übungen.

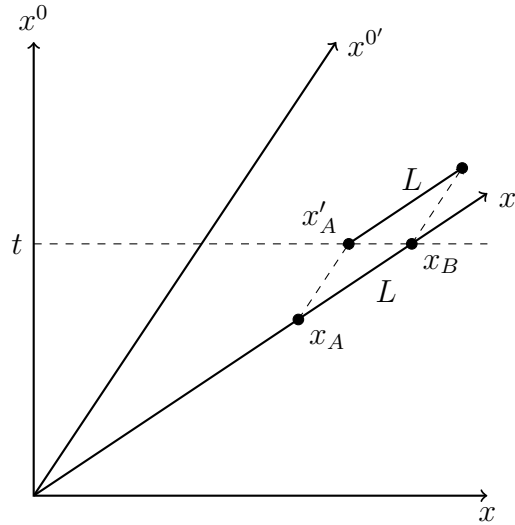


Abbildung 2.5: Raum-Zeit Diagramm mit den Koordinatenachsen der Inertialsysteme I und I' , die durch eine Lorentz-Transformation (2.100) verbunden sind. Im gestrichelten System ruht ein Gegenstand der Länge L . Wird die Länge in I zu einem Zeitpunkt t gemessen, wird eine Längenkontraktion gemessen.

Zeitdilatation

Betrachte nun folgende Situation:

- Im Inertialsystem I' ist am Punkt x' eine Uhr angebracht
- die Uhr wird zu den Zeiten t'_B und t'_A abgelesen.

Vom System I aus gesehen finden die Ereignisse $(ct'_{A/B}, x')$ bei den Koordinaten

$$\begin{aligned} x_{A/B}^0 &= \gamma(x'_{A/B} + \beta x') \\ x_{A/B} &= \gamma(x' + \beta x'_{A/B}) \end{aligned} \quad (2.131)$$

statt. Damit ist die Beziehung zwischen dem Zeitintervall $\Delta t_{BA} = (x_B^0 - x_A^0)/c$ in I und $\Delta t'_{BA}$ in I'

$$\Delta t'_{BA} = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t_{BA} < \Delta t_{BA} \quad (2.132)$$

Ein Beobachter in I zieht also die Schlussfolgerung, dass die Zeit in I' langsamer vergeht.

Alternativ verwende, dass sich der Punkt x' in I mit der Geschwindigkeit v bewegt:

$$\begin{aligned} x'_{A/B} &= \gamma(x_{A/B}^0 - \beta x_{A/B}) \\ x'_{A/B} = x' &= \gamma(x_{A/B} - \beta x_{A/B}^0) \end{aligned} \quad (2.133)$$

also $x_{A/B} = x'/\gamma + \beta x_{A/B}^0$ und

$$\Delta x'_{BA} = \gamma(1 - \beta^2) \Delta x_{BA}^0 = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta x_{A/B}^0 \quad (2.134)$$

Bemerkungen:

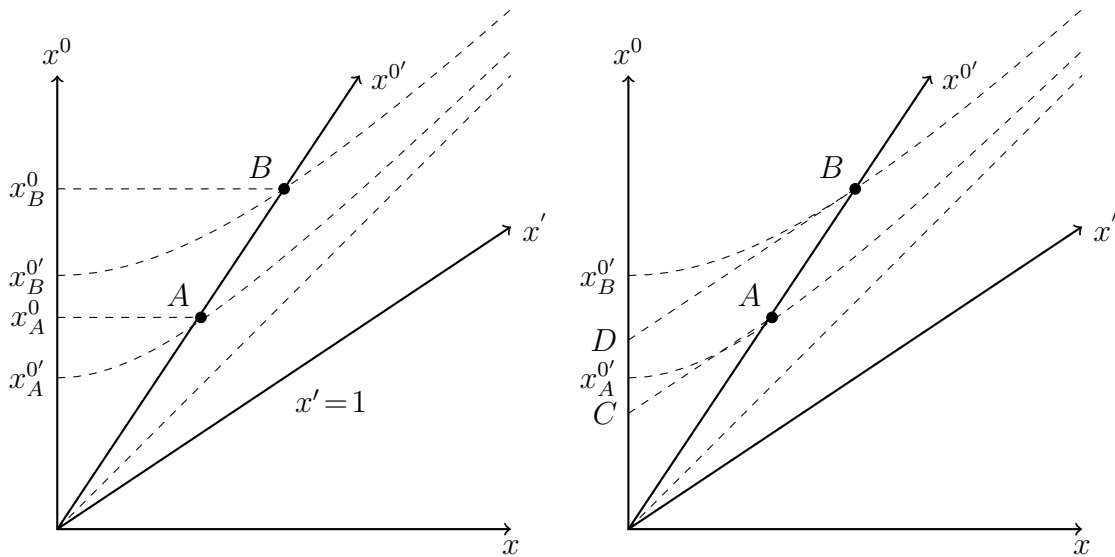


Abbildung 2.6: Raum-Zeit Diagramm mit den Koordinatenachsen der Inertialsysteme I und I' , die durch eine Lorentz-Transformation (2.100) verbunden sind. Im gestrichenen System findet die Ereignisse A und B am selben Ort statt. Links: Auf einer Uhr, die in I' an diesem Ort ruht, wird die Zeitdifferenz $x_B^{0'} - x_A^{0'}$ angezeigt, die kleiner ist, als die Zeitdifferenz $x_B^0 - x_A^0$, die für einen Beobachter in I zwischen den Ereignissen vergeht. Rechts: Für den Beobachter in I' findet das Ereignis in A gleichzeitig mit dem Ereignis C in I statt, das Ereignis B gleichzeitig zu D . Für ihn vergeht die Zeit in I langsamer.

- Die Formel (2.132) für die Zeitdilation hat eine andere Bedeutung als die Lorentztransformation der Zeitkoordinate $x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x)$: die Lorentztransformation gibt die Zeitkoordinate an, die im System I' von einer in I im Punkt x angebrachten Uhr abgelesen wird, die Zeitdilation die Zeit, die in I von einer in I' ruhenden Uhr abgelesen wird.
- Wegen der Reziprozität der Lorentztransformation wird auch ein Beobachter in I' die Zeit in I als verlangsamt ansehen. Dies ist kein Widerspruch, da diese Aussagen nicht auf dem Vergleich der Zeit auf einer einzigen Uhr in I mit einer einzigen Uhr in I' beruhen. Stattdessen werden von Beobachtern in I und I' andere Ereignisse als gleichzeitig angesehen, siehe Abbildung 2.6.

Eigenzeit

Für eine Bahnkurve $(ct, x^i(t))$ ist eine lorentzinvariante Beschreibung der Zeit durch die sogenannte **Eigenzeit** τ

$$c^2 \tau^2 = (ct)^2 - (x^i(t))^2 = x^2(t) \tag{2.135}$$

gegeben. Die Lorentzinvarianz ist wegen der Invarianz des Minkowski-Skalarprodukts klar. Im **instantanen Ruhesystem** zur Zeit t_0 ist

$$x^i(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = t_0 \quad (2.136)$$

was den Begriff „Eigenzeit“ motiviert. Die Eigenzeit lässt sich verwenden, um relativistische Verallgemeinerungen von Begriffen wie Geschwindigkeit und Beschleunigung zu definieren, siehe Kapitel 4.

Die Eigenzeit für ein Objekt mit **konstanter Geschwindigkeit** mit Bahnkurve

$$x^i(t) = v^i t \quad (2.137)$$

hängt gerade durch die Zeitdilatation (2.132) mit der Koordinatenzeit t zusammen:

$$\tau^2 = t^2 - \frac{1}{c^2} (x^i(t))^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t^2 \quad (2.138)$$

Im allgemeinen lässt sich die Bahnkurve eines bewegten Körpers durch einen Parameter λ parametrisieren:

$$x^\mu(\lambda) = \begin{pmatrix} x^0(\lambda) \\ x^i(\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.139)$$

und die Eigenzeit für die Bewegung von $x_A^\mu = x^\mu(\lambda_A)$ nach $x_B^\mu = x^\mu(\lambda_B)$ ist durch

$$\tau_{BA} = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda \sqrt{\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{x}}{d\lambda}\right)^2}$$

gegeben, da nach Kettenregel gilt

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} d\vec{x}^2 = d\lambda^2 \left[\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{x}}{d\lambda}\right)^2 \right] \quad (2.140)$$

„Zwillingsparadoxon“

Wegen des Minuszeichens der Raumkoordinaten in der Definition der Eigenzeit (2.140), hat eine Bahnkurve, die im Raum-Zeit Diagramm länger aussieht, eine kürzere Eigenzeit. Dies erklärt das sog. „Zwillingsparadoxon“ (siehe Abbildung 2.7):

- Für einen im System I ruhenden Beobachter vergeht zwischen den Ereignissen A und C die Zeit

$$\Delta t_{CA} = t_C - t_A \quad (2.141)$$

- Für einen Beobachter, der sich mit Geschwindigkeit v bis zum Raum-Zeitpunkt B und danach mit der Geschwindigkeit $-v$ nach C bewegt ist die Eigenzeit durch

$$\tau_{BA} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t_{BA} + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t_{CB} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t_{CA} < \Delta t_{CA} \quad (2.142)$$

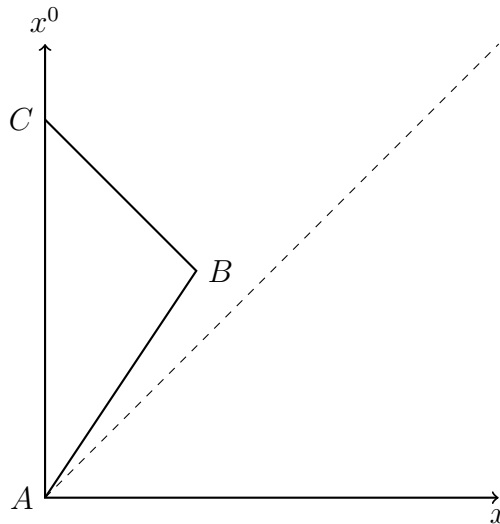


Abbildung 2.7: Raum-Zeit Diagramm zur Illustration des „Zwillingsparadoxons“.

gegeben, für den relativ zu I bewegten Beobachter vergeht also weniger Zeit. Ein realistischeres Beispiel mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung wird in den Übungen diskutiert.

- Das scheinbar paradoxe an dieser Situation ist nicht, dass verschiedene Beobachter verschiedene Zeiten messen, sondern die Asymmetrie zwischen dem Beobachter in I und dem bewegten Beobachter, da wegen dem Relativitätsprinzip alle Inertialsysteme gleichwertig sind. Der bewegte Beobachter ruht allerdings nicht die ganze Zeit in einem Inertialsystem sondern wechselt das Inertialsystem am Raum-Zeit Punkt B . Daher tritt kein Widerspruch zum Relativitätsprinzip auf.

2.3.4 Doppler Effekt und Aberration

Doppler Effekt

Betrachte eine **ebene Welle**:

$$\phi(x) = \phi_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})) + \text{c.c.} \quad (2.143)$$

(wir betrachten den einfacheren Fall eines skalaren Feldes ϕ statt des elektrischen oder magnetischen Feldes, die sich nicht-trivial unter Lorentz-Transformationen verhalten). Damit $\phi(x)$ sich trivial unter Lorentz-Transformationen transformiert,

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (2.144)$$

muss die **Phase** Lorentz-invariant sein:

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} \equiv k \cdot x \quad (2.145)$$

mit

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (2.146)$$

- Der Vierervektor k^μ transformiert sich unter einer Lorentztransformation genauso wie der Vierervektor $x^\mu = (ct, x^i)$, d.h. wie in (2.99).
- Betrachte ein System I' , in dem ein Sender ruht, der Licht mit der Kreisfrequenz ω' und Wellenvektor \vec{k}' aussendet. Eine inverse Lorentztransformation in ein System I , in dem sich der Sender mit Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{\beta}c$ bewegt, ergibt

$$\begin{aligned} k^0 &\equiv \omega/c = \gamma \left(k'^0 + (\vec{\beta} \cdot \vec{k}') \right) \\ k^i &= k'^i + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} (\vec{\beta} \cdot \vec{k}') \beta^i + \gamma \beta^i k'^0 \end{aligned} \quad (2.147)$$

- Für eine elektromagnetische Welle gilt

$$k^2 = (\omega/c)^2 - \vec{k}^2 = k'^2 = 0, \quad \omega' = c|\vec{k}'|, \quad \omega = c|\vec{k}| \quad (2.148)$$

- Für einen Boost in eine Richtung mit Winkel θ' relativ zur Ausbreitungsrichtung der Lichtwelle:

$$\vec{k}' \cdot \vec{\beta} = |\vec{k}'| |\vec{\beta}| \cos \theta' \quad (2.149)$$

gilt daher die Formel des **relativistischen Dopplereffekts** ($\beta = |\vec{\beta}|$)

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \theta') \quad (2.150)$$

Beachte, dass hier θ' der Winkel zwischen Wellenvektor und Boost-Geschwindigkeit im System des Senders sind.

- Um die Formel durch den Winkel θ zwischen Wellenvektor und Boost-Richtung im System des Empfängers,

$$\vec{k} \cdot \vec{\beta} = |\vec{k}| |\vec{\beta}| \cos \theta = \omega c \beta \cos \theta \quad (2.151)$$

auszudrücken, betrachte die Lorentz-Transformation vom System des Empfängers in das System des Senders:

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma \left(\omega - c(\vec{\beta} \cdot \vec{k}) \right) = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta) \\ \Rightarrow \omega &= \frac{\omega'}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \end{aligned} \quad (2.152)$$

Für zwei Spezialfälle vereinfacht sich die Formel des Dopplereffekts:

- Für einen Boost parallel zur Ausbreitungsrichtung, $\cos \theta = 1 = \cos \theta'$ ergibt sich der **longitudinale** Dopplereffekt

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \beta) = \omega' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (2.153)$$

wie in den Übungen betrachtet. Der inverse Ausdruck ist

$$\omega' = \omega \gamma (1 - \beta) = \omega \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \quad (2.154)$$

und geht aus (2.153) durch die Ersetzung $\beta \rightarrow -\beta$ hervor, wie von der Reziprozität erfordert.

- Für einen Boost senkrecht zur Ausbreitungsrichtung im System des Empfängers ($\cos \theta = 0$) gibt es einen nicht-verschwindenden Effekt („**Transversaler Dopplereffekt**“).

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma} \quad (2.155)$$

Dieser Effekt tritt erst in der SRT auf und ist durch die Zeitdilatation zurückzuführen. Hier ist θ der Winkel zwischen dem Wellenvektor und der Boostgeschwindigkeit im

Aberration

Wir diskutieren nun die Transformation des Wellenvektors in (2.147). Die Richtung des Lichtstrahls im System I relativ zur Boost-Geschwindigkeit ist

$$\begin{aligned} (\vec{\beta} \cdot \vec{k}) &\equiv \beta |\vec{k}| \cos \theta = (\vec{\beta} \cdot \vec{k}') \underbrace{\left(1 + \frac{\beta^2 \gamma^2}{1 + \gamma}\right)}_{-(1-\gamma)} + \gamma \beta^2 k'^0 \\ &= \beta \gamma |\vec{k}'| (\cos \theta' + \beta) \end{aligned} \quad (2.156)$$

Der Winkel relativ zur Boost-Richtung in I' steht also mit dem in I in der Beziehung

$$\cos \theta = \frac{\omega'}{\omega} \gamma (\cos \theta' + \beta) = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} \quad (2.157)$$

Dieser Effekt der Winkeländerung wird **Aberration** genannt. Das Licht einer Lichtquelle, die im System I' Licht mit dem Öffnungswinkel $\theta' = \frac{\pi}{2}$ aussendet, erscheint im System I also mit dem Öffnungswinkel

$$\theta = \arccos \beta < \frac{\pi}{2} \quad (2.158)$$

Dies wird **Scheinwerfer-Effekt** genannt.

Betrachte den Anteil des Wellenvektors senkrecht zu β :

$$k_{\perp} = |\vec{k}| \sin \theta \quad (2.159)$$

Aus der Lorentztransformation folgt

$$k'_{\perp} = k_{\perp} \quad (2.160)$$

Daher gilt

$$\sin \theta = \frac{k_{\perp}}{|\vec{k}|} = \frac{|\vec{k}'| \sin \theta'}{|\vec{k}|} = \frac{\omega' \sin \theta'}{\omega} = \frac{\sin \theta'}{\gamma(1 + \beta \cos \theta')} \quad (2.161)$$

Damit findet man die **Aberrationsformel**

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(\cos \theta' + \beta)} \quad (2.162)$$

Kapitel 3

Struktur von Lorentz-Transformationen

3.1 Gruppentheoretische Begriffe und die Galilei-Gruppe

3.1.1 Symmetrietransformationen und Gruppentheorie

Transformationen zwischen Koordinatensystemen haben natürlicherweise die mathematischen Eigenschaften einer Gruppe.

Definition. Eine Gruppe G ist eine Menge von Objekten g mit den folgenden Eigenschaften:

- Für $f, g \in G$ existiert eine **Verknüpfung** \circ so dass $f \circ g = h \in G$.
- Die Verknüpfung ist assoziativ $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- Es existiert ein **Einheitselement** $e \in G$: $e \circ g = g \circ e = g$ für alle $g \in G$.
- Für jedes Element $g \in G$ existiert ein **inverses Element** g^{-1} mit $g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e$.

Die Verknüpfung ist nicht notwendigerweise kommutativ. Falls dies der Fall ist d.h. $f \circ g = g \circ f$ für alle $f, g \in G$, wird die Gruppe **abelsch** genannt, falls die Verknüpfung nichtkommutativ ist **nicht-abelsch**.

Diese Axiome realisieren physikalisch sinnvolle Eigenschaften von Koordinatentransformationen T von Systemen $I \rightarrow I'$:

- Zwei hintereinanderausgeführte Transformationen $T_1 : I \rightarrow I'$ und $T_2 : I' \rightarrow I''$ sollen wieder eine Transformation $T : I \rightarrow I''$ sein
- Die triviale Transformation mit $I = I'$, existiert immer.
- Es soll eine inverse Transformation $T^{-1} : I' \rightarrow I$ geben.

Die Existenz der inversen Transformation mit Geschwindigkeit $-\vec{v}$ wurde schon in der Konstruktion des Boosts (2.33) verwendet.

Sowohl Raum-Zeit Translationen, Rotationen als auch eigentliche Galilei Transformationen sind Gruppen:

- Für Translationen ist die Verknüpfung die Addition, das Einheitsselement der Nullvektor und das inverse Element das negative.
- Für eigentliche Galilei Transformationen ist die Verknüpfung durch die Addition der Geschwindigkeiten gegeben:

$$x'^i = x^i - v^i t, \quad x''^i = x'^i - w^i t \quad \Rightarrow \quad x'''^i = x^i - (v^i + w^i) t$$

- Drehungen sind Elemente der **Drehgruppe** $SO(3)$, der “speziellen Orthogonalen Gruppe” in drei Dimensionen, die im folgenden genauer diskutiert wird.

3.1.2 Drehgruppe

Drehungen werden durch orthogonale Matrizen (2.42) beschrieben. Die orthogonalen Matrizen bilden eine Gruppe, mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung und der Einheitsmatrix \mathbb{I} als Einheitsselement. Die **orthogonale Gruppe in N -Dimensionen** wird $O(N)$ genannt, die Gruppe der **orthogonalen Matrizen mit $\det R = +1$ spezielle Orthogonale Gruppe** $SO(N)$.

Eine beliebige Drehung lässt sich durch Hintereinanderausführung von Drehungen um die Koordinatenachsen (2.45) konstruieren. Daran sieht man, dass die Elemente der Drehgruppe **kontinuierlich von den Parametern α^i abhängen**. Gruppen mit dieser Eigenschaft nennt man **Lie Gruppen**.

Im allgemeinen werden Elemente einer Lie-Gruppe von n Parametern α^i parametrisiert, $g(\alpha) = g(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$. Die Zahl n der Parameter heißt die **Dimension** der Lie Gruppe. Die Kompatibilität mit der Abgeschlossenheit der Gruppe unter der Verknüpfung \circ erfordert

$$g(\alpha_i) \circ g(\alpha_j) = g(\alpha_k) \quad \text{mit} \quad \alpha_k = f(\alpha_i, \alpha_j), \quad (3.1)$$

wobei die Funktionen f stetig differenzierbar von α_i und α_j abhängen.

In einer Lie Gruppe lassen sich wegen der kontinuierlichen Abhängigkeit von den Parametern Operationen aus der Analysis wie das Bilden von Grenzwerten, Ableitungen etc. definieren. Insbesondere lassen sich **infinitesimale Transformationen** in der Nähe des Einheitsselements betrachten. Im Beispiel der Drehgruppe gilt:

$$R(\epsilon \vec{n}) = \mathbb{I} + \frac{\partial R(\epsilon \vec{n})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \equiv \mathbb{I} - iT(\vec{n})\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (3.2)$$

Hier wurde aus Konventionsgründen ein Faktor i eingeführt. Die Parametrisierung wurde so gewählt, dass das Einheitsselement für den Drehwinkel $\varphi = 0$ erreicht wird:

$$R(\epsilon \vec{n}) \Big|_{\epsilon=0} = \mathbb{I}. \quad (3.3)$$

In der Gruppe $SO(3)$ lassen sich wegen $\det R = 1$ alle Elemente durch Grenzwertbildung aus einer Hintereinanderausführung von infinitesimalen Rotationen gewinnen. Die Matrizen

$$T(\vec{n}) = i \frac{\partial R(\epsilon \vec{n})}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \quad (3.4)$$

heißen daher **Generatoren** der Lie-Gruppe. Eine **Basis für die Generatoren** lässt sich aus den Drehungen um die Koordinatenachsen (2.45) definieren:

$$R(\epsilon_a \vec{e}_a) = \mathbb{I} - i\epsilon_a T^a + \dots \quad (3.5)$$

mit

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Eine endliche Rotation um $\vec{\alpha} = \alpha^a \vec{e}^a$ lässt sich aus der Hintereinanderausführung von infinitesimalen Transformationen definieren:

$$R(\vec{\alpha}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - i \frac{\alpha^a}{n} T^a \right)^n = \exp(-i\alpha^a T^a), \quad (3.7)$$

wobei die Exponentialfunktion einer Matrix durch die Reihenentwicklung definiert ist.

Die Bedingung der Orthogonalität der Drehmatrizen impliziert die Antisymmetrie der Generatoren:

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= R^T(\vec{\alpha})R(\vec{\alpha}) = \exp(-i\alpha^a (T^a)^T) \exp(-i\alpha^a T^a) \\ &= \mathbb{I} - i\alpha^a ((T^a)^T + T^a) + \dots \\ &\Rightarrow (T^a)^T = -T^a \end{aligned} \quad (3.8)$$

Das Ergebnis der Hintereinanderausführung von zwei Drehungen hängt von der Reihenfolge ab: $R_1 R_2 \neq R_2 R_1$. Die Drehgruppe ist also **nichtabelsch**. Man sagt auch, dass Drehungen nicht “vertauschen” oder nicht “kommutieren”. Für zwei infinitesimale Drehungen $R_{1/2} = \exp(-i\epsilon_{1/2}^a T^a)$ lässt sich zeigen, dass der erste nichtverschwindende Effekt der Nichtvertauschbarkeit durch

$$R_1 R_2 - R_2 R_1 = -\epsilon_1^a \epsilon_2^b (T^a T^b - T^b T^a) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (3.9)$$

gegeben ist. (\Rightarrow Übungen) Man definiert den sog. “Kommutator” zweier Matrizen durch

$$[A, B] = AB - BA \quad (3.10)$$

Für den Kommutator zwischen den Generatoren der $SO(3)$ findet man

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc} T^c \quad (3.11)$$

mit dem total antisymmetrischen Symbol

$$\epsilon^{123} = 1, \quad \epsilon^{abc} = -\epsilon^{bac} = -\epsilon^{acb} \quad (3.12)$$

Allgemein lässt sich zeigen, dass der Kommutator der Generatoren einer Lie Gruppe eine Linearkombination der Generatoren sein muss:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (3.13)$$

mit Konstanten f^{abc} , den sogenannten Strukturkonstanten. Eine Menge von Objekten, die eine Relation der Form (3.13) erfüllt heißt **Lie Algebra**. Die Relation (3.13) folgt aus der Konsistenzbedingung (3.1), die die Form

$$g(\alpha_i)g(\alpha_j) = \exp(-i\alpha_i^a T^a) \exp(-i\alpha_j^b T^b) = \exp(-i f^a(\alpha_i, \alpha_j) T^a). \quad (3.14)$$

annimmt. Die Gruppenaxiome implizieren

$$g(\alpha)g(0) = g(0)g(\alpha) = g(\alpha) \quad (3.15)$$

so dass gilt

$$f^a(0, \alpha) = f^a(\alpha, 0) = \alpha^a \quad (3.16)$$

Hier ist die Parametrisierung der Gruppenelemente so gewählt, dass $g(0) = e$. Die Taylorentwicklung der Funktion f ist daher von der Form

$$f^a(\alpha_i, \alpha_j) = \alpha_i^a + \alpha_j^a + C^{abc} \alpha_i^b \alpha_j^c + \dots \quad (3.17)$$

Durch Entwicklung von (3.14) bis zur zweiten Ordnung in den α_i lässt sich zeigen, dass die Lie Algebra (3.13) mit der Relation $f^{abc} = 2C^{bca}$ aus der Entwicklung von f^a erfüllt sein muss (\Rightarrow Übungen).

Darstellungen von Lie Gruppen und Lie Algebren

Bisher wurden die Gruppenelemente g und die Generatoren T der Drehgruppe als konkrete 3×3 Matrizen angesehen. Es lassen sich aber auch andere Realisierungen der $SO(3)$ finden als durch solche Matrizen. Alle Objekte $g(\alpha)$ für die eine Verknüpfung existiert mit der sie die Gruppenaxiome erfüllen und für die die Hintereinanderausführung durch dieselbe Funktion $f(\alpha_1, \alpha_2)$ in (3.1) definiert ist heißen **Darstellung** der $SO(3)$. Insbesondere sind in der Physik Darstellungen auf einem Vektorraum relevant.

Definition. Eine Darstellung D einer Gruppe G auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung der Elemente $g \in G$ auf lineare Abbildungen $D(g)$ von V auf sich selbst, die mit der Gruppenmultiplikation kompatibel ist:

$$g \cdot f = h \quad \Rightarrow \quad D(g)D(f) = D(g \cdot f) = D(h). \quad (3.18)$$

Analog ist eine Abbildung von einer Lie-Algebra auf lineare Abbildungen eine Darstellung der Lie Algebra, wenn die Abbildung mit der Kommutatorrelation (3.13) verträglich ist:

$$[D(T^a), D(T^b)] = f^{abc} D(T^c). \quad (3.19)$$

Beispiele:

- Die Matrizen

$$T^i = \frac{\sigma^i}{2}, \quad (3.20)$$

mit den Pauli Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

erfüllen dieselbe Lie Algebra wie die Generatoren der $SO(3)$ und bilden deswegen eine Darstellung.

- Für ein Feld, das sich trivial unter Rotationen $x' = Rx$ transformiert, ist der Zusammenhang zwischen den alten und neuen Koordinaten

$$\phi'(x') = \phi(x) = \phi(R^{-1}x') \quad (3.22)$$

Für eine infinitesimale Transformation (siehe (2.68))

$$R(-\alpha^k \vec{e}^k)x^i = x^i + \epsilon^{ijk} x^j \alpha^k + \dots \quad (3.23)$$

und damit

$$\phi'(x) = \phi(R^{-1}x) = \phi(x) + \epsilon^{ijk} x^j \alpha^k \nabla^i \phi(x) + \dots \quad (3.24)$$

Schreibt man die Wirkung der Rotation auf das Feld in der Form

$$\phi'(x) \equiv \exp(-i\alpha^i J^i)\phi(x) = (1 - i\alpha^i J^i)\phi(x) + \dots \quad (3.25)$$

findet man die Darstellung der Generatoren durch Differentialoperatoren:

$$J^i = -i\epsilon^{ijk} x^j \nabla^k \quad (3.26)$$

3.1.3 Struktur der Galilei-Gruppe

Auch die vollen Galilei-Transformationen (2.38) bilden eine Gruppe. Ein Gruppenelement g wird durch die Angabe der Rotationsmatrix, der Geschwindigkeit und der Raum und Zeit-Translation parameterisiert:

$$g(R, v^i, a^0, a^i) : \begin{cases} t & \rightarrow t - a^0 \\ x^i & \rightarrow R^i_j x^j - v^i t - a^i \end{cases} \quad (3.27)$$

Das Element hängt also von 10 Parametern ab: drei Drehwinkeln α^i , drei Geschwindigkeitskomponenten v^i , sowie den vier Parametern der Raumzeittranslation a^0 und a^i . Die Galileo Transformationen lässt sich auch in Matrixform bringen,

$$\begin{pmatrix} t' \\ x^{i'} \end{pmatrix} = L_g(R, v^i) \begin{pmatrix} t \\ x^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^i \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

mit der Matrix

$$L_g(R, v^i) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{v} & R \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Jede homogene Galilei-Transformation lässt sich als Produkt einer Rotation und einer eigentlichen Galilei Transformation schreiben:

$$L_g(R, v^i) = L_g(\mathbb{I}, v^i)L_g(R, 0) = L_g(R, 0)L_g(\mathbb{I}, (R^T v)^i) \quad (3.30)$$

wie man durch Einsetzen sieht.

Die Galilei-Transformationen erfüllen die Gruppenaxiome:

- Die Hintereinanderausführung von zwei Galilei-Transformationen $g_{1/2}(R_{1/2}, v_{1/2}^i, a_{1/2}^0, a_{1/2}^i)$ hat folgende Wirkung auf die Raum-Zeit Koordinaten:

$$g_2 \circ g_1 : \begin{cases} t & \rightarrow t - a_1^0 - a_2^0 \\ x^i & \rightarrow R_{2j}^i (R_{1k}^j x^k - v_1^j t - a_1^j) - v_2^i (t - a_1^0) - a_2^i \\ & = (R_2 R_1)^i_k x^k - [(R_2 a_1)^i + v_2^i] t - [(R_2 a_1)^i a_2^i + v_2^i a_1^0] \end{cases} \quad (3.31)$$

Das Ergebnis ist wieder eine Galilei-Transformation:

$$g_2 \circ g_1 = g(R_{21}, v_{12}^i, a_{12}^0, x_{0,12}^i) \quad (3.32)$$

mit den Parametern

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_2 \cdot R_1 \\ v_{12}^i &= (v_2 + R_2 \cdot v_1)^i \\ a_{12}^0 &= a_1^0 + a_2^0 \\ a_{12}^i &= (R_2 \cdot a_1 + v_2 a_1^0 + a_2)^i \end{aligned} \quad (3.33)$$

- Die Verknüpfung ist assoziativ, da Matrixmultiplikation und Addition assoziativ sind.
- Das Einheitselement ist durch $e = g(\mathbb{I}, \vec{0}, 0, \vec{0})$ gegeben.
- Zu jedem g existiert ein inverses Element,

$$g^{-1}(R, v^i, a^0, a^i) = g(R^T, -(R^T \cdot v)^i, -a^0, -(R^T \cdot (a + v a^0))^i) \quad (3.34)$$

Die Gruppenstruktur der Galilei-Gruppe lässt sich noch weiter diskutieren. Dazu dienen die folgenden Begriffe

- Eine Menge von Gruppenelementen $H = \{h_i\} \in G$, die für sich selbst die Gruppenaxiome erfüllen, d.h insbesondere $h_1 \circ h_2 \in H$, heißt **Untergruppe** von G . Die Raum- und Zeittranslationen, eigentlichen Galilei-Transformationen und Rotationen sind jeweils Untergruppen der vollen Galilei Gruppe.
- Eine Untergruppe H heißt **invariante Untergruppe** oder **Normalteiler** von G , wenn für alle $h \in H, g \in G$ gilt

$$g \circ h \circ g^{-1} \in H \quad (3.35)$$

- eine Gruppe ohne (nichttrivialen) Normalteiler heißt einfach, eine Gruppe ohne kontinuierlichen abelschen Normalteiler halbeinfach.

Die **homogenen Galilei-Transformationen** mit $a^0 = 0$, $a^i = 0$ haben die Eigenschaft

$$\begin{aligned} L_g(R, u) L_g(\mathbb{I}, v) \underbrace{L_g(R^T, -R^T u)}_{L_g^{-1}(R, u)} &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{u} & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{v} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ -R^T \vec{u} & R^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ R \cdot \vec{v} & R^T R \end{pmatrix} = L_g(\mathbb{I}, Rv) \end{aligned} \quad (3.36)$$

d.h. die eigentlichen Galilei-Transformationen sind ein (abelscher) Normalteiler.

3.2 Lorentzgruppe

3.2.1 Definition der Lorentzgruppe

Lorentz- und Poincarégruppe

Analog zur Definition der Drehgruppe als Menge aller Matrizen, die das Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 invariant lassen,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^i y^i \stackrel{!}{=} x'^i y'^i = (R^i_j x^j)(R^i_k y^k) \quad (3.37)$$

lässt sich die (homogene) **Lorentzgruppe** definieren als die **Menge aller Matrizen Λ , die das Skalarprodukt im Minkowski-Raum (2.107) invariant lassen** invariant lassen:

$$(x' \cdot y') = (x \cdot y) \quad \text{mit} \quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (3.38)$$

Transformationen, die eine Raum-Zeit Translation beinhalten, werden inhomogene Lorentz Transformationen oder **Poincaré Transformationen** genannt:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} - a^{\mu}, \quad (3.39)$$

Metrischer Tensor

Es ist nützlich, das Minkowski-Produkt in der Form

$$(x \cdot y) \equiv g_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu} \quad (3.40)$$

zu schreiben, wo die Komponenten des **Metrischen Tensors**

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

eingeführt wurden. Für den inversen metrischen Tensor werden per Konvention obere Indizes verwendet,

$$(g^{-1})^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} \quad (3.42)$$

er erfüllt die Bedingung

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu \equiv g_\rho^\mu \quad (3.43)$$

Komponentenweise gilt auch

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Die Invarianz des Skalarprodukts lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu &= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma \stackrel{!}{=} g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma. \\ \Rightarrow g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma &\stackrel{!}{=} g_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

formulieren. In Matrix-Notation $\Lambda \equiv (\Lambda^\mu_\nu)$ lautet die Bedingung

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (3.46)$$

Gruppeneigenschaften

Die Lorentz-Transformationen bilden eine Gruppe:

- Die Lorentz-Transformationen sind abgeschlossen bezüglich des Matrixprodukts:

$$\Lambda_{1/2}^T g \Lambda_{1/2} = g \quad \Rightarrow (\Lambda_1 \Lambda_2)^T g \Lambda_1 \Lambda_2 = g \quad (3.47)$$

- Das Matrixprodukt ist assoziativ
- Das Einheitsselement ist durch die Einheitsmatrix gegeben
- Die inverse Transformation ist durch

$$\Lambda^{-1} = g^{-1} \Lambda^T g \quad (3.48)$$

definiert:

$$\Lambda^{-1} \Lambda = g^{-1} \underbrace{\Lambda^T g \Lambda}_{=g} = \mathbb{I} \quad (3.49)$$

In Komponentenschreibweise führt man die Notation:

$$(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = g_{\nu\rho} \Lambda^\rho_\sigma g^{\sigma\mu} \equiv \Lambda_\nu^\mu \quad (3.50)$$

ein.

3.2.2 Zweige der Lorentzgruppe

Lorentz-Transformationen lassen sich durch die Eigenschaften der Matrizen Λ weiter klassifizieren. Aus der definierenden Gleichung (3.46) folgt

$$\begin{aligned} &= \det g = \det(\Lambda^T g \Lambda) = |\det \Lambda|^2 \det g \\ \Rightarrow \quad &\det \Lambda = \pm 1. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Die Menge der Lorentz Transformationen mit Determinante ± 1 wird L_{\pm} genannt.

- L_+ bildet eine **Untergruppe** der Lorentzgruppe, die Elemente von L_+ werden **eigentliche Lorentz-Transformationen** genannt.

In Analogie zur Notation $SO(N)$ für die Gruppe der orthogonalen $N \times N$ Matrizen, nennt man Matrizen, die einen $N + M$ -dimensionalen Metrischen Tensor mit N Einträgen $+1$ und M Einträgen -1 invariant lassen, $SO(N, M)$. Es gilt also

$$L_+ = SO(3, 1) \quad (3.52)$$

- L_- ist nicht abgeschlossen bezüglich der Matrixmultiplikation (das Produkt von Matrizen mit Determinante -1 hat Determinante $+1$) und bildet daher keine Untergruppe.

Eine weitere Klassifizierung folgt aus (3.46) für $\rho = \sigma = 0$:

$$g_{00} = 1 = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^i{}_0)^2. \quad (3.53)$$

Die Lorentz-Transformationen erfüllen also

$$|\Lambda^0{}_0| \geq 1. \quad (3.54)$$

- Die Menge von Lorentz-Transformationen mit $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ wird als L^\uparrow bezeichnet und formt eine Untergruppe, die sogenannte **orthochrone** Untergruppe der Lorentzgruppe.
- Die Menge von Lorentz-Transformationen mit $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ wird L^\downarrow genannt und bildet keine Untergruppe.

Insgesamt zerfällt die Lorentzgruppe in vier disjunkte Untermengen:

| | det Λ : | $\Lambda^0{}_0$: | Beispiel: | |
|------------------|-----------------|-------------------|---|--------|
| L_+^\uparrow | + | > 1 | $\Lambda = 1$ | |
| L_-^\uparrow | -1 | > 1 | $\Lambda = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \equiv \Lambda_P$ | (3.55) |
| L_-^\downarrow | -1 | < -1 | $\Lambda = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \equiv \Lambda_T$ | |
| L_+^\downarrow | +1 | < -1 | $\Lambda = -1 = \Lambda_P \Lambda_T$ | |

- Die einzige Untergruppe ist die der **eigentlichen, orthochronen** Lorentz-Transformationen L_+^\uparrow , auch **spezielle Lorentz-Transformationen** genannt.
- Die Elemente der anderen Untermengen lassen sich aus den speziellen Lorentz-Transformationen durch Multiplikation mit den Matrizen Λ_P , Λ_T oder $\Lambda_P\Lambda_T$ erhalten. Diese Lorentz-Transformationen entsprechen **diskreten Symmetrien**, der **Paritätstransformation** (Raumspiegelung)

$$P: \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_P{}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

und der **Zeitumkehrtransformation**

$$T: \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda_T{}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Es gilt also

$$L = L_+^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\uparrow \cup L_-^\downarrow = L_+^\uparrow \cup TL_+^\uparrow \cup PL_+^\uparrow \cup TPL_+^\uparrow \quad (3.58)$$

Im Folgenden wird der Begriff „Lorentzinvarianz“ für Invarianz unter speziellen Lorentz-Transformationen verwendet. Die diskreten Transformationen P und T lassen sich getrennt diskutieren.

3.2.3 Die Lorentzgruppe als Lie Gruppe

Zerlegung von Lorentz-Transformationen

Wir kennen zwei Klassen von Transformation, die (3.38) invariant lassen:¹

- Boosts, die kontinuierlich von den Relativgeschwindigkeiten $\vec{\beta}$ abhängen

$$L^\mu{}_\nu(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta^i \\ \gamma\beta^j & \delta_j^i - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta^i\beta^j \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Es ist oft hilfreich, statt der Geschwindigkeit die sog. **Rapidity** $\vec{\nu}$ einzuführen,

$$\beta = \tanh \nu, \quad (3.60)$$

durch die sich die Boosts entlang der Koordinatenachsen in der Form

$$L(\nu\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} \cosh \nu & 0 & 0 & \sinh \nu \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \nu & 0 & 0 & \cosh \nu \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

etc, ausdrücken lassen (\Rightarrow Übungen).

¹Wir gehen in diesem Abschnitt zur aktiven Formulierung der Lorentz-Boosts über, um mit den üblichen Konventionen übereinzustimmen (d.h. $\beta \rightarrow -\beta$ bzw. $\nu \rightarrow -\nu$ in den Formeln für die Boosts.)

- Drehungen, die kontinuierlich von den Winkeln ϕ abhängen

$$R^\mu{}_\nu(\vec{\phi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^i{}_j(\vec{\phi}) \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Es lässt sich zeigen dass sich analog zu den Galilei-Transformationen (3.30) alle speziellen Lorentz-Transformationen in ein Produkt einer Drehungen und eines Boosts zerlegen lassen [1, 3]:

$$\Lambda = L(\vec{\beta})R(\vec{\phi}) = R(\vec{\phi})L(R^T \cdot \vec{\beta}) \quad (3.63)$$

wobei

$$\tilde{\beta}^i = \frac{\Lambda^i{}_0}{\Lambda^0{}_0} \quad (3.64)$$

Beweisskizze von (3.63):

- Wegen (3.53) gilt

$$\tilde{\beta}^2 = \frac{(\Lambda^i{}_0)^2}{(\Lambda^0{}_0)^2} = \frac{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}{(\Lambda^0{}_0)^2} < 1$$

so dass $\tilde{\beta}$ ein erlaubter Geschwindigkeitsparameter ist.

Es gilt

$$\gamma(\tilde{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{\beta}^2}} = \frac{\Lambda^0{}_0}{\sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^i{}_0)^2}} = \Lambda^0{}_0 \quad (3.65)$$

- Der Boost in der Zerlegung (3.63) hat die Form

$$L^\mu{}_\nu(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \\ \Lambda^j{}_0 & \delta_j^i + \frac{\Lambda^i{}_0}{1 + \Lambda^0{}_0} \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_0 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

(die „falsche“ Indexstellung ist eine Konsequenz der Identifizierung $L^i{}_0 = L^0{}_i = \tilde{\beta}^i = \Lambda^i{}_0/\Lambda^0{}_0$)

- Durch Ausmultiplizieren findet man

$$\tilde{R} \equiv L^{-1}(\vec{\beta})\Lambda = L(-\vec{\beta})\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & -\Lambda^j{}_0 \\ -\Lambda^i{}_0 & \delta_j^i + \frac{1}{1 + \Lambda^0{}_0} \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_k \\ \Lambda^j{}_0 & \Lambda^j{}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & R \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

mit einer Drehmatrix R . Um dies zu sehen, betrachte

$$\tilde{R}^0{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^i{}_0)^2 = 1 \quad (3.68)$$

$$\tilde{R}^0{}_k = \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_k + \Lambda^j{}_0 \Lambda^j{}_k = 0 \quad (3.69)$$

$$\tilde{R}^i{}_0 = -\Lambda^i{}_0 \Lambda^0{}_0 + \Lambda^i{}_0 \left(1 + \frac{(\Lambda^j{}_0)^2}{1 + \Lambda^0{}_0} \right) = 0 \quad (3.70)$$

$$= \frac{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}{1 + \Lambda^0{}_0}$$

Hier wird auch über gleiche obere Indizes summiert. In der ersten und dritten Zeile wurde (3.53) verwendet, in der zweiten Zeile die analoge Bedingung $g_{0i} = 0 = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_i = \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_i - \Lambda^j{}_0 \Lambda^j{}_i$.

- Die Tatsache, dass R eine Drehmatrix mit $R^R R = \mathbb{I}_3$ ist, folgt daraus, dass sowohl Λ als auch L den Metrischen Tensor invariant lassen und die Matrix \tilde{R} die Raum und Zeit-Koordinaten nicht mischt, d.h.

$$\tilde{R}^T g \tilde{R} = g \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & -R^T R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & -\mathbb{I}_3 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

- Die zweite Identität in (3.63) folgt durch Auswerten der Bedingung $g^{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} \Lambda_\rho{}^\mu \Lambda_\sigma{}^\nu$.

L_+^\uparrow als Liegruppe

Aus der Zerlegung (3.63) folgt, dass die speziellen Lorentztransformationen L_+^\uparrow eine Liegruppe bilden:

- Eine spezielle Lorentz-Transformation lässt sich durch die sechs Parameter β^i und ϕ^i parametrisieren
- Die Gruppenelemente hängen kontinuierlich von den Parametern ab, da R und L kontinuierlich von den Parametern abhängen.

Weitere Bemerkungen:

- Die Rotationen bilden eine **Untergruppe** von L_+^\uparrow , die Boosts nicht; die Hintereinanderausführung von zwei Boosts ergibt im Allgemeinen das Produkt eines Boosts und einer Rotation. Dies ist im Unterschied zur Galilei-Gruppe, in der die eigentlichen Galilei-Transformationen eine Untergruppe bilden.
- Die Rotation werden durch die Winkel φ parametrisiert, die Werte auf einer kompakten Menge ($0 \leq \varphi < 2\pi$) annehmen, da $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ derselben Drehung entsprechen.
- Die Boosts werden durch die Rapiditäten ν parametrisiert, deren Wertebereich ($-\infty < \nu < \infty$) nicht kompakt ist. Man sagt, die Lorentz-Gruppe ist **nicht kompakt**.

Generatoren und Lie-Algebra

Für die drei-dimensionalen Drehmatritzen haben wir die Exponentialdarstellung (3.7)

$$R(\vec{\alpha}) = \exp(-i\alpha^a T^a), \quad (3.72)$$

mit den Generatoren T^a der $SO(3)$ (3.6) gefunden. Wir suchen nun eine analoge Darstellung der Boosts. Dafür ist die Darstellung durch die Rapidität sinnvoll, siehe Gl. (3.61).

Für eine Rotation um die 3-Achse (eingebettet in eine Raum-Zeit Transformation) und einen Boost entlang der 3-Achse (3.61) bekommt man für infinitesimale Parameter $\delta\varphi$ und $\delta\nu$:

$$R(\delta\varphi \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\delta\varphi & 0 \\ 0 & \delta\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\delta\varphi^2) \equiv \mathbf{1} - i\delta\varphi J^3 + \mathcal{O}(\delta\varphi^2), \quad (3.73)$$

$$L(\delta\nu \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta\nu \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta\nu & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\delta\nu^2) \equiv \mathbf{1} - i\delta\nu K^3 + \mathcal{O}(\delta\nu^2), \quad (3.74)$$

Die Matrizen J^3 und K^3 sind die Generatoren infinitesimaler Drehungen um die x^3 Achse bzw. Boosts in die x^3 -Richtung. Aus den Drehungen um bzw. Boosts entlang der übrigen Achsen ergeben sich die sechs **Generatoren der speziellen Lorentzgruppe**:

$$J^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.75)$$

$$K^1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Die Generatoren bilden eine Lie Algebra mit den Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= i\epsilon^{ijk} J^k, \\ [J^i, K^j] &= i\epsilon^{ijk} K^k, \\ [K^i, K^j] &= -i\epsilon^{ijk} J^k, \end{aligned} \quad (3.77)$$

die sog. **Lorentz Algebra**.

- Die erste Kommutatorrelation ist von den 3-dimensionalen Rotationen vertraut
- Die zweite Relation lässt sich so interpretieren, dass sich die K^i unter infinitesimalen Drehungen wie ein Vektor transformieren
- Die dritte Relation ist konsistent damit, dass die Boosts keine Untergruppe bilden sondern das Produkt zweier Boosts in der Regel eine Drehung beinhaltet (die sogenannte „Wigner Drehung“)

Durch Hintereinanderausführung von infinitesimalen Rotationen und Boosts analog zu (3.7) findet man die Form der endlichen Transformationen:

$$R(\vec{\varphi}) = \exp(-i\varphi^i J^i), \quad L(\vec{\nu}) = \exp(-i\nu^i K^i). \quad (3.78)$$

- Diese Form der endlichen Transformationen gilt nur für die spezielle Lorentz-Gruppe L_+^\uparrow , da sich die Transformationen P und T nicht durch Entwicklung um das Einheitsselement gewinnen lassen
- Die Generatoren der Drehungen sind hermitesch, die der Boosts nicht:

$$J^{i\dagger} = J^i, \quad K^{i\dagger} = -K^i. \quad (3.79)$$

Daher werden Boosts nicht durch unitäre Matrizen dargestellt, im Gegensatz zu Drehungen.

Kovariante Formulierung

Die Lorentz-Algebra (3.77) ist in einer Form geschrieben, in der Boosts und Rotationen getrennt behandelt werden, d.h. nicht in einer „manifest kovarianten“ Form, in der die Raum-Zeit Koordinaten gleichberechtigt behandelt werden. Um eine solche Form zu finden, betrachten wir infinitesimale Lorentz-Transformationen, die in der Form

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\delta\omega) = \delta^\mu_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu + \dots \quad (3.80)$$

geschrieben werden. Die Bedingung, dass die Λ eine Lorentz-Transformation bilden, wird in linearer Ordnung in den $\delta\omega$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma &= g_{\mu\nu}(\delta^\mu_\rho + \delta\omega^\mu{}_\rho)(\delta^\nu_\sigma + \delta\omega^\nu{}_\sigma) + \dots \\ &= g_{\rho\sigma} + \delta\omega_{\sigma\rho} + \delta\omega_{\rho\sigma} + \dots \stackrel{!}{=} g_{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Die $\delta\omega$ sind also antisymmetrisch:

$$\delta\omega_{\sigma\rho} = -\delta\omega_{\rho\sigma}. \quad (3.82)$$

Antisymmetrische vier-mal-vier Matrizen haben sechs unabhängige Einträge, d.h. wir erhalten wieder das Ergebnis, dass Lorentztransformationen von sechs Parametern abhängen. Unter Verwendung der Antisymmetrie der $\delta\omega_{\sigma\rho}$ lässt sich (3.80) in die Form

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\delta\omega) = \delta^\mu_\nu + \delta\omega_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} \delta_\nu^\beta \equiv \delta^\mu_\nu - \frac{i}{2} \delta\omega_{\alpha\beta} (M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu, \quad (3.83)$$

bringen, aus der man die **Generatoren infinitesimaler Lorentz-Transformationen** ablesen kann:

$$(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = i(g^{\alpha\mu} \delta_\nu^\beta - g^{\beta\mu} \delta_\nu^\alpha). \quad (3.84)$$

Hier indizieren α und β die sechs Generatoren, während μ und ν die Komponenten der Matrix $M^{\alpha\beta}$ bezeichnen. In Matrixform schreiben sich die infinitesimalen Lorentztransformationen als

$$\Lambda(\delta\omega) = \mathbf{1} - \frac{i}{2} \delta\omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}. \quad (3.85)$$

Die Generatoren (3.84) erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i(g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}). \quad (3.86)$$

Diese Form der Lorentz-Algebra lässt sich z.B. aus der Darstellung der Generatoren als Differentialoperator herleiten (\Rightarrow Übungen).

Durch Exponentieren der infinitesimalen Transformationen erhält man eine Parametrisierung der endlichen Transformationen:

$$\Lambda(\omega) = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}\right) = \exp(-i\varphi^i J^i - i\nu^i K^i). \quad (3.87)$$

Hier wurden die Erzeugenden der Boosts und Rotationen sowie die Rapidität und der Drehwinkel als

$$K^i = M^{0i}, \quad J^k = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{ij}, \quad (3.88)$$

$$\nu^i = \omega_{0i}, \quad \varphi^k = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega^{ij} \quad (3.89)$$

identifiziert.

Die Komponenten der Generatoren (3.88) stimmen mit den früher gefundenen expliziten Ausdrücken überein:

$$(K^i)^\mu{}_\nu = i(g^{0\mu}\delta_\nu^i - g^{i\mu}\delta_\nu^0) = \begin{cases} i, & \mu = 0, \nu = i \quad \text{or} \quad \mu = i, \nu = 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.90)$$

$$(J^k)^{mn} = \frac{i}{2}\epsilon^{ijk}(g^{im}\delta_{jn} - g^{jm}\delta_{in}) = -i\epsilon^{ijk}\delta_{im}\delta_{jn} = -i\epsilon^{mnk}. \quad (3.91)$$

Die Kommutator-Relationen (3.86) sind zu den Relationen (3.77) äquivalent:

$$[K^i, K^j] = [M^{0i}, M^{0j}] = -iM^{ij} = i\epsilon^{ijk}K^k, \quad (3.92)$$

$$[J^i, K^j] = \frac{1}{2}\epsilon^{imn}[M^{mn}, M^{0j}] = -i\frac{1}{2}\epsilon^{imn}(\delta^{mj}M^{n0} - \delta^{nj}M^{m0}) = -i\epsilon^{ijn}\underbrace{M^{n0}}_{=-K^n}, \quad (3.93)$$

$$[J^1, J^2] = [M^{23}, M^{31}] = -iM^{21} = iJ^3, \quad \text{etc. .} \quad (3.94)$$

3.2.4 Ausblick auf die relativistische Behandlung von Teilchen mit Spin

Die komplexen Linearkombinationen der Generatoren von Boosts und Drehungen

$$T_{1/2}^i = \frac{1}{2}(J^i \mp iK^i), \quad (3.95)$$

erfüllen die Kommutator-Relationen

$$[T_a^i, T_b^j] = i\epsilon^{ijk}T_a^k\delta_{a,b}. \quad (3.96)$$

die identisch zu denen der Drehungen sind. In der Quantenmechanik des Drehimpulses findet man alle Matrizen, die diese Vertauschungsrelationen erfüllen. Insbesondere bilden die Pauli-Matrizen (3.21) eine Lösung, die Teilchen mit Spin einhalb beschreibt. Dies ist der Ausgangspunkt für die relativistische Beschreibung solcher Teilchen. Im Gegensatz zum nicht-relativistischen Fall gibt es zwei verschiedene „Spinordarstellungen“ der Lorentzgruppe:

Die „rechtshändige Weyl-Spinor-Darstellung“ $D^{(\frac{1}{2},0)}$:

$$T_1^{(\frac{1}{2}),i} = \frac{\sigma^i}{2}, \quad T_2^{0,i} = 0. \quad (3.97)$$

Lorentz-Transformationen werden durch die Matrizen

$$\Lambda^{(\frac{1}{2},0)} = \exp\left(-\frac{i}{2}(\vec{\phi} + i\vec{\nu})\vec{\sigma}\right) \equiv \Lambda_R. \quad (3.98)$$

dargestellt.

Die “linkshändige Weyl-Spinor-Darstellung” $D^{(0,\frac{1}{2})}$:

$$T_1^{0,i} = 0, \quad T_2^{(\frac{1}{2}),i} = \frac{\sigma^i}{2}. \quad (3.99)$$

Lorentz-Transformationen werden durch die Matrizen

$$\Lambda^{(0,\frac{1}{2})} = \exp\left(-\frac{i}{2}(\vec{\phi} - i\vec{\nu})\vec{\sigma}\right) \equiv \Lambda_L. \quad (3.100)$$

dargestellt.

Die berühmten **Dirac Spinoren**, sind vier-komponentige Objekte, auf denen Lorentz-Transformationen durch die Matrizen

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda_R & 0 \\ 0 & \Lambda_L \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

dargestellt sind. Die Notation links/rechtshändig kommt daher, dass unter einer Paritäts-Transformation $K^i \rightarrow -K^i$ und $J^i \rightarrow +J^i$ transformiert werden, d.h. T_1 und T_2 tauschen ihre rollen. Dirac-Spinoren sind nötig, um eine Paritätsinvariante Theorie zu formulieren. Für eine Einführung in der Konstruktion der Feldgleichungen für Spinoren in diesem Gruppentheoretischen Zugang siehe z.B. [6]. Die Anwendung der quantenmechanischen Regeln für die Addition von Drehimpulsen erlauben die Behandlung von Teilchen mit anderen Spins.

3.3 Poincarégruppe

Wir diskutieren jetzt die Eigenschaften der Poincaré Transformationen (3.39), die ebenfalls wie die Lorentztransformationen eine Gruppe bilden. Analog zur bei der Galilei Gruppe verwendeten Notation, wird ein Gruppenelement g durch die Matrix der Lorentztransformation Λ und durch den Vierervektor der Raum-Zeit Translation a parametrisiert:

$$g(\Lambda, a) : x \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu - a^\mu. \quad (3.102)$$

Die Poincaré-Transformationen erfüllen die Gruppenaxiome:

- Die Hintereinanderausführung von zwei Poincaré-Transformationen $g_{1/2}(\Lambda_{1/2}, a_{1/2})$ hat folgende Wirkung auf die Raum-Zeit Koordinaten:

$$\begin{aligned} g_2 \circ g_1 : x^\mu &\rightarrow \Lambda_{2\nu}^\mu (\Lambda_{1\sigma}^\nu x^\sigma - a_1^\nu) - a_2^\mu \\ &= (\Lambda_2 \Lambda_1)^\mu{}_\nu x^\nu - [(\Lambda_2 a_1)^\mu + a_2^\mu] \end{aligned} \quad (3.103)$$

Das Ergebnis ist wieder eine Poincaré-Transformation:

$$g_2 \circ g_1 = g(\Lambda_{21}, a_{12}) \quad (3.104)$$

mit den Parametern

$$\begin{aligned} \Lambda_{12} &= \Lambda_2 \cdot \Lambda_1 \\ a_{12} &= \Lambda_2 \cdot a_1 + a_2 \end{aligned} \quad (3.105)$$

- Die Verknüpfung ist assoziativ, da Matrixmultiplikation und Addition assoziativ sind.
- Das Einheitsselement ist durch $e = g(\mathbb{I}, 0)$ gegeben.
- Zu jedem g existiert ein inverses Element,

$$g^{-1}(\Lambda, a) = g(\Lambda^{-1}, -(\Lambda^{-1} \cdot a)), \quad (3.106)$$

d.h.

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu (x'^\nu + a^\nu) \quad (3.107)$$

Die Translationen bilden eine (abelsche) invariante Untergruppe:

$$g^{-1}(\Lambda, a)g(\mathbf{I}, b)g(\Lambda, a) = g(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)g(\Lambda, a+b) = g(\mathbf{I}, \Lambda^{-1}(a+b-a)) = g(\mathbf{I}, \Lambda^{-1}b) \quad (3.108)$$

Die Generatoren der Poincaré Gruppe sind die Generatoren der Lorentzgruppe $M^{\mu\nu}$ und die Generatoren von Raum-Zeit Translationen P^μ . Eine Darstellung der Generatoren und die Kommutator-Relationen lassen sich analog zur Diskussion bei Drehungen (3.25) aus der Wirkung auf Funktionen erhalten:

$$f'(x) = f(\Lambda^{-1}(x+a)) \equiv e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta} - ia_\alpha P^\alpha} f(x).$$

Man findet, dass die Generatoren durch die Operatoren

$$L^{\alpha\beta} = i(x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha), \quad P^\alpha = i\partial^\alpha$$

dargestellt werden (\Rightarrow Übungen). Die $L^{\alpha\beta}$ erfüllen dieselben Kommutatorrelationen wie die $M^{\mu\nu}$ (3.77), d.h. sie bilden eine Darstellung der Lorentz-Algebra. Die verbleibenden Kommutatorrelationen sind

$$[L^{\alpha\beta}, P^\gamma] = -i(g^{\alpha\gamma}P^\beta - g^{\beta\gamma}P^\alpha), \quad [P^\alpha P^\beta] = 0 \quad (3.109)$$

Zusammen mit den Vertauschungsrelationen der L bilden sie die **Poincaré Algebra**.

3.4 Vierervektoren und Tensoren

Hier geben wir eine etwas ausführliche Definition von Vektoren und Tensoren in der Raum-Zeit, die auf [5, 7] basiert und Koordinaten-unabhängige Konzepte betont. Vektoren werden als Basis-unabhängige Objekte eingeführt, Duale Vektoren und Tensoren als lineare Abbildungen, die Vektoren auf die reellen Zahlen abbilden. Das Verhalten der Komponenten von Vektoren und Tensoren sowie Regeln zum „Hoch- und Herunterziehen von Indizes“ folgen dann automatisch.

3.4.1 Basisvektoren und Vektoren

Bisher: Betrachte Raum-Zeitkoordinaten (x^0, x^i) . Erinnerung an Notation in 2.1: Raumvektor \vec{x} ist unabhängig von Wahl des Koordinatensystem, Entwicklung in Basis von Einheitsvektoren \vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 = x^i \vec{e}_i \quad (3.110)$$

Führe jetzt analog **Raum-Zeit Basisvektoren** e_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ ein, die bezüglich eines (abstrakt definierten) Skalarprodukts normiert sind:

$$(e_\mu \cdot e_\nu) = g_{\mu\nu} \quad (3.111)$$

wobei die Koeffizienten der Metrik (3.40) auftreten. Ein Raum-Zeit Vektor a ist ein Basis-unabhängiges Objekt, dessen Komponentenzerlegung in der Basis $\{e_\mu\}$ die Form

$$a = a^\mu e_\mu \quad (3.112)$$

hat.

Betrachte nun eine Transformation der Basisvektoren:

$$e'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu e_\nu \quad (3.113)$$

mit Koeffizienten $\Lambda_\mu{}^\nu$. Damit auch die neuen Basisvektoren normiert sind, muss gelten

$$g_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} (e'_\mu \cdot e'_\nu) = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta (e_\alpha \cdot e_\beta) = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta g_{\alpha\beta} \quad (3.114)$$

d.h. die Λ müssen Lorentz-Transformationen sein!

Da der Raum-Zeit Vektor a unabhängig vom Koordinatensystem ist,

$$a = a'^\mu e'_\mu = a'^\mu \Lambda_\mu{}^\alpha e_\alpha \equiv a^\alpha e_\alpha \quad (3.115)$$

müssen die Komponenten a'^μ im neuen System die Form

$$a'^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha a^\alpha \equiv \Lambda^\mu{}_\alpha a^\alpha \quad (3.116)$$

haben, mit der inversen Transformation

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \quad (3.117)$$

3.4.2 Duale Vektoren

Die Menge aller linearen Abbildungen ω der Vektoren in die reellen Zahlen,

$$\omega(a) \in \mathbb{R} \quad (3.118)$$

bildet den **dualen Vektorraum**. Die Linearität impliziert

$$\omega(\lambda a) = \lambda \omega(a) \quad (3.119)$$

$$\omega(a + b) = \omega(a) + \omega(b) \quad (3.120)$$

Die ω werden zu einem Vektorraum, indem Summe und Multiplikation mit einer reellen Zahl definiert werden als

$$(\omega_1 + \omega_2)(a) = \omega_1(a) + \omega_2(a) \quad (\lambda \omega)(a) = \lambda \omega(a) \quad (3.121)$$

Duale Vektoren lassen sich nach **dualen Basisvektoren** e^μ zerlegen,

$$\omega = \omega_\mu e^\mu \quad (3.122)$$

mit

$$e^\mu(e_\nu) = \delta_\mu^\nu \quad (3.123)$$

Die **Komponenten eines dualen Vektors** ω_μ ergeben sich durch die Anwendung auf die Basisvektoren:

$$\omega_\mu \equiv \omega(e_\mu) \quad (3.124)$$

Mit der Komponentenzzerlegung der Vektoren a ergibt sich für die Wirkung eines dualen Vektors:

$$\omega(a) = \omega_\mu e^\mu(a) = \omega_\mu e^\mu(a^\nu e_\nu) = \omega_\mu a^\mu \quad (3.125)$$

Das Verhalten der dualen Komponenten eines Vektors unter Basistransformationen folgt aus dem der Basisvektoren und der Linearität:

$$\omega'_\mu = \omega(e'_\mu) = \omega(\Lambda_\mu^\nu e_\nu) = \Lambda_\mu^\nu \omega_\nu \quad (3.126)$$

Duale (kovariante) Komponenten eines Vektors

Die Existenz des Minkowski Skalarprodukts ermöglicht es, jedem Vektor a einen dualen Vektor ω_a zuzuordnen über die Definition

$$\omega_a(b) \equiv (a \cdot b) \quad (3.127)$$

Die Komponenten von ω_a definieren die **dualen Komponenten** a_μ des Vektors a :

$$\omega_a = a_\mu e^\mu \quad \text{mit} \quad \omega_a(e_\mu) = a_\mu \quad (3.128)$$

Die dualen Komponenten hängen mit den Komponenten a^μ durch „Hochziehen des Index mit der Metrik“ zusammen:

$$a_\mu = \omega_a(e_\mu) = (a \cdot e_\mu) = a^\nu (e_\nu \cdot e_\mu) = g_{\mu\nu} a^\nu \quad (3.129)$$

Explizit gilt für die Raum- und Zeitkomponenten

$$a_0 = a^0 \quad a_i = -a^i \quad (3.130)$$

Man nennt die dualen Vektoren auch **Kovektoren** und die dualen Komponenten **kovariante** Komponenten. In dieser Sprache werden die Komponenten a^μ von Vektoren die **kontravarianten** Komponenten genannt.

Gradient als dualer Vektor

Ein natürliches Beispiel eines dualen Vektors ist der **Gradient in der Richtungsableitung**.

Sei eine **Bahnkurve** durch den Vektor $x(\lambda)$ gegeben, mit dem **Tangentialvektor**

$$X = \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) e_\mu \equiv X^\mu e_\mu \quad (3.131)$$

und eine Funktion $f(x)$ werde auf dieser Bahnkurve ausgewertet, $f(x) = f(x(\lambda)) \equiv f(\lambda)$. Dann gilt

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv X^\mu \partial_\mu f \quad (3.132)$$

Die Ableitung hängt also linear von dem Vektor X ab und definiert daher einen dualen Vektor, der als $\tilde{d}f$ bezeichnet wird:

$$\tilde{d}f(X) = X^\mu \partial_\mu f \quad (3.133)$$

Die Komponenten des dualen Vektors sind gerade

$$(\tilde{d}f)_\mu = \tilde{d}f(e_\mu) = \partial_\mu f \quad (3.134)$$

Explizit sind die Komponenten des **Gradienten-Operators**

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla^i \right) \quad (3.135)$$

Der räumliche $\vec{\nabla}$ Operator tritt also mit positivem Vorzeichen in dem vierdimensionalen Gradienten-Operator mit unteren Indizes auf.

Die Komponenten des Gradienten transformieren sich wie die eines dualen Vektors,

$$\partial'_\mu f = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu f \quad (3.136)$$

da mit Verwendung der Kettenregel

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \left(\frac{dx^{\nu'}}{d\lambda} \right) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \right) \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv X^{\nu'} \partial'_\nu f \quad (3.137)$$

Daraus folgt wegen $x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^{\nu'}$ das gesuchte Transformationsverhalten (3.136),

$$\partial'_\nu f = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \right) \partial_\mu f = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \partial_\mu f \quad (3.138)$$

3.4.3 Tensoren

Ein Tensor n -ter Stufe T ist definiert als eine (multi-) lineare Abbildung von n Vektoren in die Reellen Zahlen:

$$T(a, b, \dots, n) \in \mathbb{R} \quad (3.139)$$

Die Linearität impliziert die Eigenschaften

$$T(\lambda a, b, \dots, n) = \lambda T(a, b, \dots, n) \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.140)$$

$$T(a_1 + a_2, b, \dots, n) = T(a_1, b, \dots, n) + T(a_2, b, \dots, n) \quad (3.141)$$

und analog in den anderen Argumenten.

Einsetzen der Zerlegung der Vektoren in der Basis e_μ und Verwenden der Linearität ergibt

$$\begin{aligned} T(a, b, \dots, n) &= T(a^{\mu_1} e_{\mu_1}, b^{\mu_2} e_{\mu_2}, \dots, n^{\mu_n} e_{\mu_n}) = a^{\mu_1} b^{\mu_2} \dots n^{\mu_n} T(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_n}) \\ &\equiv T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} a^{\mu_1} b^{\mu_2} \dots n^{\mu_n} \end{aligned} \quad (3.142)$$

mit den **kovarianten Komponenten des Tensors T**

$$T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = T(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_n}) \quad (3.143)$$

Das Verhalten der Komponenten eines Tensors unter Lorentztransformationen folgt aus der Linearität sowie der Koordinatenunabhängigkeit des Tensors T :

$$T'_{\alpha\beta\dots} = T(e'_\alpha, e'_\beta, \dots) = T(\Lambda_\alpha^\mu e_\mu, \Lambda_\beta^\nu e_\nu, \dots) = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \dots T_{\mu\nu\dots} \quad (3.144)$$

Die kovarianten Komponenten eines Tensors transformieren sich also bezüglich jeden Indizes wie die kovarianten Komponenten eines Vektors. Dieses Verhalten wird oft zur Definition eines Tensors verwendet („Ein Tensor ist ein Tensor, der sich wie ein Tensor transformiert“)

Beispiele:

- Der metrische Tensor g ist ein Tensor zweiter Stufe, der durch

$$g(a, b) \equiv (a \cdot b) = a^\mu b^\nu (e_\mu \cdot e_\nu) = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (3.145)$$

definiert ist.

- Das total antisymmetrische Symbol

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & (\mu\nu\rho\sigma) \text{ gerade Permutation von } (0123), \\ -1 & (\mu\nu\rho\sigma) \text{ ungerade Permutation von } (0123), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.146)$$

definiert den Tensor

$$\epsilon(a, b, c, d) = \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} a^{\mu_1} b^{\mu_2} c^{\mu_3} d^{\mu_4} \quad (3.147)$$

Dieses Objekt ist invariant unter speziellen Lorentztransformationen ($\Lambda \in L_+^\uparrow$) (\Rightarrow Übungen)

Tensorprodukt von Vektoren

Aus n -Vektoren a_i lässt sich ein Tensor n -ter Stufe $a_1 \otimes a_2 \cdots \otimes a_n$ definieren, das Tensorprodukt, der nach der Vorschrift

$$a_1 \otimes a_2 \cdots \otimes a_n \equiv T : \quad T(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \cdot b_1)(a_2 \cdot b_2) \dots (a_n \cdot b_n) \quad (3.148)$$

auf Vektoren wirkt. Die Komponenten sind durch

$$T_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n} = T(e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots, e_{\mu_n}) = a_{1, \mu_1} a_{2, \mu_2} \cdots a_{n, \mu_n} \quad (3.149)$$

gegeben. Analog ergibt das **Tensorprodukt eines Tensors S_1 n -ter Stufe mit einem Tensor S_2 m -ter Stufe** einen Tensor $n + m$ -ter Stufe:

$$S_1 \otimes S_2 \equiv T : \quad T(a_1, a_2, \dots, a_{n+m}) = S_1(a_1, \dots, a_n) S_2(a_{n+1}, \dots, a_{n+m}) \quad (3.150)$$

In Komponenten gilt

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+m}} = S_{1, \alpha_1 \dots \alpha_n} S_{2, \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{n+m}} \quad (3.151)$$

Kontravariante Komponenten eines Tensors

Die **Entwicklung in der Basis der dualen Vektoren** e_μ definiert die kontravarianten Komponenten eines Tensors:

$$T = T^{\alpha\beta\dots\nu} e_\alpha \otimes e_\beta \cdots \otimes e_\nu \quad (3.152)$$

Nach der Definition des Tensorproduktes gilt

$$T(a, \dots, n) = T^{\alpha\beta\dots\nu} (a \cdot e_\alpha)(b \cdot e_\beta) \dots (n \cdot e_\nu) = T^{\alpha\beta\dots\nu} a_\alpha b_\beta \dots n_\nu \quad (3.153)$$

Wie bei den Komponenten von Vektoren ist der Zusammenhang zwischen den Komponenten eines Tensors und den dualen Komponenten durch die Metrik gegeben:

$$T_{\alpha\beta\dots} = T(e_\alpha, e_\beta, \dots) = T^{\mu\nu\dots} (e_\alpha \cdot e_\nu)(e_\beta \cdot e_\nu) \cdots = T^{\mu\nu\dots} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \cdots \quad (3.154)$$

Gemischte Tensoren

Ein (m, n) **Tensor** hat m **Vektoren** und n **Ko-Vektoren** als Argumente:

$$T(a_1, \dots, a_m, \omega_1 \dots \omega_n) = T_{\mu_1 \dots \mu_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} a^{\mu_1} \dots a^{\mu_m} \omega_{\nu_1} \dots \omega_{\nu_n} \quad (3.155)$$

Das Verhalten der Komponenten unter Lorentz-Transformationen folgt aus dem der Basisvektoren:

$$T'_{\mu_1 \dots}{}^{\nu_1 \dots} = T(e'_{\mu_1}, \dots, e'^{\nu_1} \dots) = T(\Lambda_{\mu_1}{}^{\alpha_1} e_{\alpha_1}, \dots, \Lambda^{\nu_1}{}_{\beta_1} e^{\beta_1} \dots) = \Lambda_{\mu_1}{}^{\alpha_1} \dots \Lambda^{\nu_1}{}_{\beta_1} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\beta_1 \dots} \quad (3.156)$$

Die Komponenten eines gemischten Tensors transformieren sich also bezüglich jeden Indizes wie die Komponenten eines Vektors mit derselben Indexstellung.

Gradient von Tensorfeldern

Tensorfelder $T(x)$ sind Tensoren, deren Komponenten von den Raum-Zeitkoordinaten abhängen. Die Ableitung eines $(n, 0)$ Tensorfeldes T entlang der Bahnkurve $x(\lambda)$ ergibt:

$$\frac{dT(x)}{d\lambda}(a, \dots, n) = X^\mu \partial_\mu T(x)_{\alpha\beta\dots\nu} a^\alpha b^\beta \dots n^\nu \quad (3.157)$$

Der **Gradient von** T lässt sich also als $(n+1, 0)$ -Tensor \tilde{dT} definieren mit der Eigenschaft

$$\tilde{dT}(x)(X, a, \dots, n) = (\partial_\mu T(x)_{\alpha\beta\dots\nu}) X^\mu a^\alpha b^\beta \dots n^\nu \quad (3.158)$$

Analog lässt sich der Gradient von (n, m) Tensoren definieren.

Divergenz eines Vektorfeldes und Wellenoperator

Aus dem Ausdruck für die Komponenten des Gradienten eines Vektorfeldes $V(x) = V^\mu(x)e_\mu$,

$$(\tilde{dV})_\mu{}^\nu = \partial_\mu V^\nu(x) \quad (3.159)$$

bekommt man durch Kontraktion der Indizes die **Divergenz eines Vektorfeldes**

$$\partial_\mu V^\mu(x) = \partial_0 V^0(x) + \partial_i V^i(x) = \dot{V}^0(x) + \vec{\nabla} \cdot \vec{V}. \quad (3.160)$$

Beachte, dass hier ein positives Vorzeichen vor der räumlichen Divergenz von \vec{V} auftritt. Die Indexstellung ist konsistent mit

$$\partial_\mu x^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (3.161)$$

Wir geben hier keine koordinatenunabhängige Definition der Divergenz eines Vektorfeldes, die Diskussion hier gilt für Koordinatensysteme mit einer konstanten Metrik, nicht für krummlinige Koordinatensysteme.

Aus den Komponenten der Divergenz eines Gradienten lässt sich der **invariante Wellen- (d'Alembert) Operator** definieren:

$$\square := \partial_\mu \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2. \quad (3.162)$$

3.4.4 Tensoren und Darstellungen der Lorentzgruppe

Die Wirkung einer durch die Parameter ω parametrisierten Lorentztransformation auf die Komponenten eines Vektors,

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu \quad (3.163)$$

stellt eine Realisierung einer abstrakten Lorentztransformation als lineare Transformation im Minkowskiraum dar, die die **Fundamentaldarstellung** genannt wird.

Äquivalente Darstellungen Zwei Darstellungen D und D' auf demselben Vektorraum heißen **äquivalent**, wenn eine invertierbare Transformation S existiert, so dass

$$D'(g) = SD(g)S^{-1}, \quad \forall g \in G.$$

Die Darstellung auf den Komponenten eines dualen Vektors,

$$a'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} a_{\nu} \quad (3.164)$$

ist also äquivalent zur Fundamentaldarstellung, da

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = g_{\nu\rho} \Lambda^{\rho}_{\sigma} g^{\sigma\mu} \quad (3.165)$$

Es ist üblich, die Darstellungen nach ihrer Dimensionalität zu benennen, d.h. die Fundamentaldarstellung wird als 4 bezeichnet.

Direktes Produkt von Darstellungen Seien $D_{1/2}$ Darstellungen auf Vektorräumen $V_{1/2}$. Eine Darstellung $D_1 \otimes D_2$ auf dem direkten Produkt der Vektorräume $V_1 \otimes V_2$ ist durch die Vorschrift

$$(D_1 \otimes D_2)(g)(v_1 \otimes v_2) = (D_1(g)v_1) \otimes (D_2(g)v_2). \quad (3.166)$$

gegeben. Die Wirkung der Lorentztransformationen auf die Komponenten eines Tensors n -ter Stufe ist also äquivalent zur Darstellung auf dem n -fachen Tensorprodukt des Minkowskiraums. Diese Darstellung wird üblicherweise als

$$\underbrace{4 \otimes 4 \cdots \otimes 4}_{n\text{-mal}} \quad (3.167)$$

bezeichnet.

Tensorprodukt Darstellungen lassen sich im allgemeinen in einfachere Darstellungen zerlegen, was wir hier für den Fall von Tensoren zweiter Stufe diskutieren wollen.

Symmetrien von Tensoren

Ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe S bzw. dessen Komponenten haben die Eigenschaft

$$S(a, b) = S(b, a) \quad \Rightarrow \quad S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}, \quad (3.168)$$

analog für einen antisymmetrischen Tensor A :

$$A(a, b) = -A(b, a) \quad \Rightarrow \quad A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}. \quad (3.169)$$

Jeder Tensor zweiter Stufe T lässt sich in einen **symmetrischen, spurfreien Anteil** S , einen **antisymmetrischen Anteil** A und einen „**Spuranteil**“ D zerlegen:

$$T_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}D \quad (3.170)$$

mit

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \quad (3.171)$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}T_{\rho}^{\rho} \quad (3.172)$$

$$D = T_{\mu}^{\mu} \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \quad (3.173)$$

Zerlegung von Darstellungen

Lorentztransformationen ändern Symmetrieeigenschaften der Komponenten nicht, z.B.:

$$A'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha}\Lambda_{\nu}^{\beta}A_{\alpha\beta} = -\Lambda_{\mu}^{\alpha}\Lambda_{\nu}^{\beta}A_{\beta\alpha} = -A'_{\nu\mu} \quad (3.174)$$

Die **Spur** eines Tensors **ist invariant** unter Lorentztransformationen:

$$D' = g^{\mu\nu}T'_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\Lambda_{\mu}^{\alpha}\Lambda_{\nu}^{\beta}T_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = D \quad (3.175)$$

Daher lässt sich die 16-dimensionale Darstellung der Lorentzgruppe auf den Komponenten von Tensoren zweiter Stufe in kleinere Darstellungen zerlegen:

- die Darstellung auf dem neun-dimensionalen Raum der symmetrischen spurfreien Tensoren zweiter Stufe
- die Darstellung auf dem sechs-dimensionalen Raum der antisymmetrischen Tensoren
- die triviale Darstellung, die auf der Spur des Tensors wirkt

Man schreibt die Zerlegung der Darstellung auf dem Tensorprodukt als²

$$4 \otimes 4 = 9 \oplus 6 \oplus 1 \quad (3.176)$$

Man sagt, die 16-dimensionale Darstellung $4 \otimes 4$ sei **reduzibel**. Darstellungen, die sich nicht weiter in einfachere Darstellungen zerlegen lassen heißen **irreduzible Darstellungen**, dies ist für eben gefundenen Darstellungen der Fall³ Auf eine formale Definition von Irreduzibilität und weitere Details zur „Ausreduktion“ von Darstellungen wird hier verzichtet, siehe z.B. [3].

²Für den analogen Fall der Darstellung der Drehgruppe auf Tensoren zweiter Stufe lautet diese Zerlegung $3 \otimes 3 = 5 \oplus 3 \oplus 1$. In der Quantenmechanik tritt diese Zerlegung bei der „Addition von Drehimpulsen“ auf, wo sie bedeutet, dass ein System von zwei Spin-eins Teilchen den Gesamtdrehimpuls zwei (mit 5 Werten für die Projektion auf die z -Achse) eins (3 Werten) und Null (1 Wert) haben kann.

³Betrachtet man Darstellungen der L_{+}^{\uparrow} auf komplexen Vektorräumen lässt sich die Darstellungen auf den antisymmetrischen Tensoren noch weiter zerlegen [3], worauf wir nicht weiter eingehen wollen.

Kapitel 4

Relativistische Mechanik

Zur Beschreibung der Dynamik von Teilchen in einer Form, die mit der speziellen Relativitätstheorie konsistent ist müssen Größen wie Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls und Kraft in eine Form mit wohldefiniertem Verhalten unter Lorentztransformationen gebracht werden. Dies ist automatisch der Fall, wenn sie sich durch Vierervektoren oder Tensoren ausdrücken lassen. Wir suchen also eine Verallgemeinerung von Newtons Gleichung der Form

$$\dot{p} = K \quad (4.1)$$

mit Vierervektoren p und K , dem Viererimpuls und der sog. Minkowskikraft.

4.1 Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls

4.1.1 Vierergeschwindigkeit

In (4.1) wurde bewusst die „Zeitableitung“ des Viererimpulses \dot{p} nicht näher definiert. Eine naive Verallgemeinerung der nicht-relativistischen Geschwindigkeit

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} c \\ v^i \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad v^i = \frac{dx^i}{dt} \equiv \dot{x}^i \quad (4.2)$$

führt nicht zu die Komponenten eines Vierervektors, da t als Null-Komponente eines Vierervektors nicht Lorentz invariant ist.

Stattdessen hatten wir die Lorentzinvariante **Eigenzeit** τ durch

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} d\vec{x}^2 = dt^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right) = \gamma^{-2}(v) dt^2 \quad (4.3)$$

definiert. Wir definieren also die sogenannte **Vierergeschwindigkeit** u mit den Komponenten

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(v) \begin{pmatrix} c \\ v^i \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Es gilt

$$u^2 = c^2 \quad (4.5)$$

was schon daraus folgt, dass u^2 Lorentz-invariant ist und im (instantanen) Ruhesystem des Teilchens $u^\mu = (c, \vec{0})$ gilt.

Es treten also zwei Größen auf, die mit der Geschwindigkeit zusammenhängen:

- $u^\mu(\tau)$ ist die Tangente an die Bahnkurve $x^\mu(\tau)$ in der Raum-Zeit
- \vec{v} ist die räumliche Geschwindigkeit bezüglich der Koordinaten eines bestimmten Inertialsystems.

Addition von Geschwindigkeiten

Die Komponenten der Vierergeschwindigkeit transformieren sich nach Konstruktion als Komponenten eines Vierervektors

$$u'^\mu = \Lambda^\mu_\nu u^\nu \quad (4.6)$$

Für einen Boost mit Geschwindigkeit v_1 findet man explizit mit (2.99)

$$\begin{aligned} u^{0'} &= \gamma_1 \left(u^0 - (\vec{\beta}_1 \cdot \vec{u}) \right) \\ u'^i &= u^i + \frac{\gamma_1^2}{1 + \gamma_1} (\vec{\beta}_1 \cdot \vec{u}) \beta_1^i - \gamma_1 \beta_1^i u^0 \\ &= u_\perp^i + \gamma_1 (u_\parallel^i - \beta_1^i u^0) \end{aligned} \quad (4.7)$$

mit $\gamma_1 = \gamma(v_1)$. Hier wurden die Raumkomponenten analog wie in (2.122) zerlegt:

$$\begin{aligned} u^i &= u_\parallel^i + u_\perp^i, \quad \vec{\beta}_1 \cdot \vec{u}_\perp = 0 \\ u_\parallel^i &= \beta_1^i \frac{\vec{u} \cdot \vec{\beta}_1}{\beta_1^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Setzt man die Komponenten der Vierergeschwindigkeit (4.4) ein, und fordert, dass die transformierte Vierergeschwindigkeit wieder diese Form hat, bekommt man

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma_1 \gamma \left(1 - \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v})}{c^2} \right) \\ \gamma' v'^i &= \gamma v_\perp^i + \gamma_1 \gamma (v_\parallel^i - v_1^i) \end{aligned} \quad (4.9)$$

mit $\gamma = \gamma(v)$ und $\gamma' = \gamma(v')$. Damit findet man das Transformationsverhalten der parallelen und orthogonalen Komponenten der räumlichen Geschwindigkeiten,

$$\begin{aligned} v'^i_\parallel &= \frac{\gamma_1 \gamma}{\gamma'} (v_\parallel^i - v_1^i) = \frac{v_\parallel^i - v_1^i}{1 - \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v})}{c^2}} \\ v'^i_\perp &= \frac{\gamma}{\gamma'} v_\perp^i = \frac{\gamma_1 v_\perp^i}{1 - \frac{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v})}{c^2}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Diese Ergebnisse stimmen mit dem früher hergeleiteten Additionstheorem der Geschwindigkeiten (2.124) überein, was die Konsistenz der Identifikation von u als Vierervektor belegt.

4.1.2 Viererimpuls

Als naheliegende relativistische Verallgemeinerung des Impulses führt man den **Viererimpuls** ein.

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ \dot{x}^i \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Die Zeit-artige Komponente p^0 reduziert sich im nicht-relativistischen Grenzfall zu der kinetischen Energie und der „Ruhe-Energie“ mc^2 :

$$p^0 = mc\gamma = \frac{mc}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} = c^{-1} \left(mc^2 + \frac{m}{2} \vec{v}^2 + \dots \right). \quad (4.12)$$

Wir identifizieren daher p^0 mit der Energie:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc\gamma \\ m\gamma \vec{x} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Die Minkowski-Norm des Vierervektors ergibt

$$p^2 = (E/c)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \gamma^2 (1 - \vec{v}^2/c^2) = m^2 c^2. \quad (4.14)$$

Die relativistische Beziehung von Energie und Impuls ist durch

$$E = c \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2} \quad (4.15)$$

gegeben. Die Relation (4.14) nennt man **Massenschalenbedingung**.

Bemerkungen:

- Die Masse m ist die „Ruhemasse“, die unabhängig von dem Inertialsystem definiert ist.
- Die Masse lässt sich in jedem Inertialsystem durch Messung von Energie und Impuls bestimmen.
- Für masselose Teilchen lässt sich die Definition (4.12) nicht verwenden. In diesem Fall lässt sich der Viererimpuls durch die Quantenmechanische Energie-Impulsrelationen (1.10) definieren

$$E = \hbar\omega \quad p = \hbar\omega c \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad (4.16)$$

die (4.14) mit $m = 0$ erfüllen, d.h. $cE = |\vec{p}|$.

Viererimpulserhaltung

Für eine konsistente Verallgemeinerung der nicht-relativistischen Kinematik benötigt man ein Analogon zur Impulserhaltung. Dies lässt sich entweder postulieren, die relativistischen Ausdrücke ergeben sich dann aus der Konsistenz von Impulserhaltung und Lorentzinvarianz. Alternativ lassen sich aus einer relativistischen Formulierung der Mechanik Erhaltungsgrößen gewinnen. Wir werden später sehen, dass analog zur nicht-relativistischen Mechanik in Systemen die **invariant unter Raum-Zeit-Translationen** sind, Energie und Impuls erhalten sind. Für einen **Streuprozess** mit N Teilchen mit Impulsen p_i im Anfangszustand und M Teilchen mit Impulsen k_j im Endzustand gilt **Viererimpulserhaltung**

$$\sum_{i=1}^N p_i^\mu = \sum_{j=1}^M k_j^\mu, \quad (4.17)$$

wobei alle Teilchen die jeweiligen on-shell Bedingungen, $p_i^2 = m_i^2 c^2$, $k_j^2 = m_j^2 c^2$, erfüllen.

- Die räumlichen Komponenten von (4.17) lauten

$$\sum_{i=1}^N m_i \gamma_i \vec{v}_i = \sum_{j=1}^M m_j \gamma_j \vec{v}_j, \quad (4.18)$$

d.h. Impulserhaltung gilt für die Raum-Komponenten des Viererimpulses mit den Faktoren γ , nicht für den nicht-relativistischen Ausdruck $m\vec{v}$.

- Die **kinetische Energie** T_i der Teilchen lässt sich durch Abziehen der Ruhe-Energie definieren:

$$T_i = p_i^0 - m_i c^2, \quad T_j = k_j^0 - m_j c^2 \quad (4.19)$$

Die zeitartige Komponente von (4.17) lautet damit

$$\sum_{i=1}^N (T_i + m_i c^2) = \sum_{j=1}^M (T_j + m_j c^2) \quad (4.20)$$

Daran erkennt man, dass **Masse keine Erhaltungsgröße** in der relativistischen Mechanik ist. Schwere Teilchen können in Kollisionen von leichteren Teilchen erzeugt werden und in leichtere Teilchen zerfallen.

- Der räumliche Anteil von (4.17) lässt sich herleiten, indem man einen Ansatz $\vec{p}_i = m f(v_i^2) \vec{v}_i$ macht, für die Größen \vec{p}_i Impulserhaltung fordert und die entstehenden Bedingungen für bestimmte Streuprozesse in verschiedenen Inertialsystemen auswertet. Daraus ergibt sich $f(v_i^2) = \gamma$ (\Rightarrow z.B. [8]).
- Statt (4.15) könnte man versuchen, die Energie mit einer anderen Ruhe-Energie E_0 zu definieren:

$$E \stackrel{?}{=} c \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2} + (E_0 - m c^2) \quad (4.21)$$

Aus der Forderung nach Energie- und Impulserhaltung lässt sich aber $E_0 = mc^2$ schliessen (Jackson). Ein Argument für diese Identifizierung ist, dass für eine Lorentz-invariante Formulierung der Zusammenhang von Vierer-Impuls und Vierergeschwindigkeit von der Form

$$p^\mu = mu^\mu + \Delta^\mu \quad (4.22)$$

sein müßte mit $\Delta^0 = (E_0 - mc^2)$ und in jedem Inertialsystem $\vec{\Delta} = 0$, da wie oben diskutiert die Identifizierung von p^i mit dem Impuls aus der Forderung nach Impulserhaltung folgt. Ein solcher Vierervektor muss aber identisch verschwinden, $\Delta^\mu = 0$.

Beispiel: Teilchenzerfall

Betrachte den Zerfall eines massiven Teilchens mit Masse M und Impuls P in zwei Teilchen mit Massen m_1 und m_2 . Im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens sind die Viererimpulse

$$P^\mu = \begin{pmatrix} Mc \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad k_1^\mu = \begin{pmatrix} E_1/c \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad k_2^\mu = \begin{pmatrix} E_2/c \\ -\vec{k} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Hier wurde Impulserhaltung in der Form $\vec{k}_2 = -\vec{k}_1 \equiv \vec{k}$ verwendet. Wegen Energieerhaltung gilt

$$E_1 + E_2 = Mc^2. \quad (4.24)$$

Da $E_i \geq m_i c^2$, ist der Zerfallsprozess nur möglich wenn $M > m_1 + m_2$.

Die Massenschalenbedingungen der Zerfallsprodukte implizieren

$$E_{1/2} = c\sqrt{m_{1/2}^2 c^2 + \vec{k}^2} \quad (4.25)$$

Aus Viererimpulserhaltung lässt sich die Energie von Teilchen 1 berechnen:

$$\begin{aligned} c^2 m_2^2 &= k_2^2 = (P - k_1)^2 = P^2 + k_1^2 - 2P \cdot k_1 \\ &= c^2 M^2 + c^2 m_1^2 - 2E_1 M \\ \Rightarrow E_1 &= c^2 \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Analog findet man die Energie von Teilchen 2:

$$E_2 = c^2 \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} = Mc^2 - E_1. \quad (4.27)$$

Der Betrag des räumliche Impulses der Zerfallsprodukte lässt sich z.B. aus der Massenschalenbedingung von Teilchen 1 herleiten:

$$\begin{aligned} \vec{k}^2 &= E_1^2/c^2 - m_1^2 c^2 = c^2 \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4M^2 m_1^2}{4M^2} \\ &= c^2 \frac{M^4 + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 2M^2(m_1^2 + m_2^2)}{4M^2}. \\ \Rightarrow |\vec{k}| &= c \frac{\sqrt{\lambda(M^2, m_1^2, m_2^2)}}{2M} \quad \text{mit} \quad \lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc). \end{aligned}$$

4.2 Relativistische Dynamik

4.2.1 Viererbeschleunigung

Die Komponenten der **Viererbeschleunigung** a sind durch

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (4.28)$$

definiert. Da $u^2 = c^2$ gilt, steht die Viererbeschleunigung (im Sinne des Minkowski-Skalarprodukts) senkrecht auf der Vierergeschwindigkeit:

$$0 = \frac{d}{d\tau}(u_\mu u^\mu) = 2(a \cdot u) \quad (4.29)$$

4.2.2 Minkowski Kraft

Es ist naheliegend, eine Verallgemeinerung von Newtons Gleichung mit Hilfe des Vierer-Impulses in der Form

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = K^\mu \quad (4.30)$$

zu definieren. Die Größe K wird **Minkowski-Kraft** genannt. Für $dm/d\tau = 0$, was für Punktteilchen der Fall ist (m ist die Ruhemasse), gilt

$$ma^\mu = K^\mu. \quad (4.31)$$

Aus Konsistenzgründen muss gelten

$$0 = m(a \cdot u) = (K \cdot u) \quad (4.32)$$

Im (instantanen) Ruhesystem des Teilchens gilt $u = (c, \vec{0})$, d.h. in diesem System muss

$$K^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ F^i \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

sein, mit der **Newtonschen Kraft** \vec{F} . Da K ein Vierervektor ist, ergeben sich die Komponenten in einem Inertialsystem in dem sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit v bewegt zu

$$\begin{aligned} K^{0'} &= \gamma(\vec{\beta} \cdot \vec{F}) \\ K^{ri} &= F^i + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} (\vec{\beta} \cdot \vec{F}) \beta^i \\ &= \gamma F_{\parallel}^i + F_{\perp}^i \end{aligned} \quad (4.34)$$

hier wurde die Zerlegung

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}, \quad \vec{F}_{\parallel} = \vec{\beta} \frac{(\vec{F} \cdot \vec{\beta})}{\beta^2}, \quad \vec{\beta} \cdot \vec{F}_{\perp} = 0 \quad (4.35)$$

verwendet

- Die Zeit-Komponente von (4.30) ergibt mit (4.34)

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} \quad (4.36)$$

d.h. die am Teilchen pro Zeiteinheit geleistete Arbeit.

- Im allgemeinen müssen Minkowski Kräfte geschwindigkeitsabhängig sein
- Für eine Kraft, die aus dem Gradient eines skalaren Potentials folgt ist die naive kovariante Verallgemeinerung des nicht-relativistischen Ausdrucks $\vec{F} = -\kappa \vec{\nabla} \phi$,

$$K^\mu \stackrel{?}{=} \kappa \partial^\mu \phi \quad (4.37)$$

nicht konsistent: $(u \cdot K) = 0$ impliziert $0 = u^\mu \partial_\mu \phi = \frac{d\phi(x)}{d\tau}$, d.h. das Potential müsste entlang der Trajektorie konstant sein. Der Ausdruck

$$K^\mu = \kappa \left[\partial^\mu \phi - \frac{1}{c^2} u^\mu (u \cdot \partial \phi) \right] \quad (4.38)$$

erfüllt stattdessen (4.32) und reduziert sich im Ruhesystem $u^\mu = (c, \vec{0})$ auf die nicht-relativistische Kraft.

- Für eine Minkowski-Kraft der Form (4.34) wird der Raumanteil von (4.30)

$$\gamma \frac{d}{dt} (m \gamma \vec{v}) = \gamma \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp \quad (4.39)$$

Der Beitrag \vec{F}_\perp zeigt, dass im allgemeinen die richtigen relativistischen Bewegungsgleichungen nicht durch Einführen einer „relativistischen Masse“ $m(v) = \gamma(v)m$ aus den nicht-relativistischen Ausdrücken zu bekommen sind.

Beispiel: Konstante Beschleunigung

Wir betrachten ein relativistisches Teilchen, das einer konstanten Newton-schen Kraft F in x -Richtung unterliegt. Die dazugehörige Bewegungsgleichung ist

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} (m u^\mu) = K^\mu \quad (4.40)$$

Im Inertialsystem des Beobachters sei die Kraft durch $K_0^\mu = (0, F, 0, 0)^T$ gegeben. Ein Boost in das instantane Ruhesystem des Teilchens, das sich mit v entlang der x -Achse bewegt, ergibt

$$K^\mu = \gamma (vF/c, F, 0, 0) \quad (4.41)$$

Aus der Bewegungsgleichung fällt ein Faktor γ heraus:

$$\frac{d}{dt} (\gamma m \dot{x}(t)) = F \quad (4.42)$$

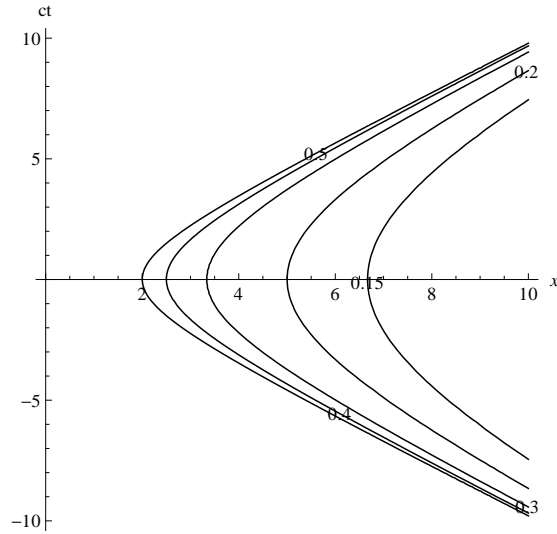


Abbildung 4.1: Weltlinien von konstant beschleunigten Teilchen.

Integration der Bewegungsgleichung ergibt

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} = a t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t)^2 \left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} \right) = a^2 t^2, \quad (4.43)$$

wobei die Integrationskonstante zu Null gesetzt wurde. Auflösen nach \dot{x} und nochmalige Integration ergibt

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \\ \Rightarrow x(t) &\stackrel{y=(at/c)^2}{=} \frac{c^2}{2a} \int \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} + x_0 \\ \Rightarrow (x(t) - x_0)^2 - (ct)^2 &= \frac{c^4}{a^2} \end{aligned}$$

Die Bewegung lässt sich durch einen Bahnparameter λ parametrisieren

$$\begin{aligned} t(\lambda) &= \frac{c}{a} \sinh\left(\frac{a}{c}\lambda\right), \\ x(\lambda) &= x_0 + \frac{c^2}{a} \cosh\left(\frac{a}{c}\lambda\right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.2.3 Kovariante Formulierung der Lorentz-Kraft

Anstatt zu versuchen, die bekannte Lorentz-Kraft in eine kovariante Form (4.30) zu bringen, wollen wir sie hier „wiederentdecken“, indem wir eine der einfachsten Möglichkeiten für eine

Minkowski-Kraft ansetzen. Da die Kraft von den Geschwindigkeiten abhängt, machen wir den Ansatz eines Tensors zweiter Stufe, der linear von der Vierergeschwindigkeit abhängt:

$$K = \frac{q}{c} F^{\mu}{}_{\nu} e_{\mu} \otimes u^{\nu} \quad \Rightarrow \quad K^{\mu} = \frac{q}{c} F^{\mu}{}_{\nu} u^{\nu} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_{\nu} \quad (4.45)$$

Die Bedingung (4.32) impliziert

$$0 = (u \cdot K) = q F^{\mu\nu} u_{\mu} u_{\nu} = \frac{q}{2} (F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu}) u_{\mu} u_{\nu} = 0 \quad (4.46)$$

Dies ist sicher erfüllt, wenn F antisymmetrisch ist, was im folgenden angenommen wird.

Die Bewegungsgleichung lässt sich mit den Komponenten von F schreiben als

$$\gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} E/c \\ p^i \end{pmatrix} = q\gamma \begin{pmatrix} -F^{0i} v^i \\ F^{i0} - F^{ij} \frac{v^j}{c} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Der antisymmetrische Tensor F lässt sich durch sechs Komponenten E^i und B^i ausdrücken:

$$E^i = F^{i0} \quad (4.48)$$

$$B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F^{jk}, \text{ d.h. } F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k \quad (4.49)$$

oder in Matrixform

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Für die Bewegungsgleichung bekommt man

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} E/c \\ p^i \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} (\vec{E} \cdot \vec{v}) \\ E^i + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B})^i \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

d.h. (4.47) reproduziert gerade die Lorentzkraft.

4.3 Wirkungsprinzip für relativistische Teilchen

Hamiltonsches Wirkungsprinzip

Ein systematisches Aufstellen von Bewegungsgleichungen, die kovariant unter Lorentztransformationen sind, erlaubt die Lagrange-Formulierung der Mechanik. Wie schon in Abschnitt 2.2.3 wird das System auf dem Konfigurationsraum **verallgemeinerter Koordinaten und Geschwindigkeiten**

$$(q_i, \dot{q}_i) \quad (4.52)$$

beschrieben. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich nach Hamiltons Wirkungsprinzip aus dem **Extremum der Wirkung**

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (4.53)$$

unter **Variationen**

$$q_i \rightarrow q_i + \delta q_i = q_i + \alpha h_i, \quad (4.54)$$

$$\dot{q}_i \rightarrow \dot{q}_i + \alpha \dot{h}_i, \quad (4.55)$$

die so gewählt werden, dass die Funktionen h_i an den Rändern des Intervalls verschwinden.

$$h_i(t_{i/f}) = 0. \quad (4.56)$$

Die **Euler-Lagrange Gleichungen** ergeben sich aus der Variation

$$0 = \frac{dS}{d\alpha} \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (4.57)$$

Form der Wirkung

Zur Formulierung der relativistischen Mechanik mit dem Hamiltonschen Variationsprinzip suchen wir ein **Lorentz-invariantes Wirkungsfunktional**

$$S[x^\mu] \quad (4.58)$$

so dass sich die Bewegungsgleichungen (4.30) aus einem Extremalprinzip ergeben.

Wir betrachten den Fall eines Punktteilchens, das mit extern vorgegebenen Feldern (insbesondere dem elektromagnetischen Feld) wechselwirkt.

Die Bahnkurve des Teilchens werde durch einem Parameter λ parametrisiert:

$$x^\mu(\lambda) = \begin{pmatrix} x^0(\lambda) \\ x^i(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

Wir verwenden die Notation

$$\dot{x}^\mu(\lambda) = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \quad (4.60)$$

Die Lorentz-Invarianz der Wirkung S für die Propagation des Teilchens zwischen Ereignissen bei τ_i und τ_f ist gewährleistet, wenn sie von der Form

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau f(x, u) \quad (4.61)$$

ist, mit dem Eigenzeiteintervall (2.140)

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} dx^\mu dx_\nu = dt^2 - \frac{1}{c^2} d\vec{x}^2 = d\lambda^2 \left[\left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right)^2 \right] = d\lambda^2 \frac{\dot{x}^2}{c^2} \quad (4.62)$$

Eine Entwicklung der Funktion f in Potenzen von u^μ führt zu der Form

$$f(x, u) = [\kappa_0 + \kappa_1 \phi(x) + \kappa_2 u^\mu A_\mu(x) + \kappa_3 h_{\mu\nu}(x) u^\mu u^\nu + \dots] \quad (4.63)$$

Werden die Felder ϕ , A , h als extern vorgegeben angesehen, ist die Theorie nicht Poincaré invariant. Wir nehmen aber an, dass sich die Theorie dahingehend erweitern lässt, dass das Gesamtsystem von Punktteilchen und Feldern Poincaré invariant ist. Daher wird keine explizite Abhängigkeit der Funktion f von x^μ zugelassen.

Die verschiedenen Terme haben die Interpretation

- κ_0 : Freies Teilchen
- ϕ : Wechselwirkung mit skalarem Potential (\Rightarrow Übungen)
- A : Wechselwirkung mit Vektorfeld \Rightarrow Lorentzkraft
- h : Wechselwirkung mit symmetrischem Tensor zweiter Stufe

Wir diskutieren hier den Fall des freien Teilchens, sowie des Vektorfeldes ausführlich, der wieder zur Lorentzkraft führt. Der symmetrische Tensor führt zur Beschreibung der Gravitation in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Freies Teilchen

Die Wirkung, die sich für den einfachen Fall $\kappa_i = 0$, $i > 0$ ergibt, ist proportional zum Eigenzeitintervall $\Delta\tau_{fi} = \tau_f - \tau_i$:

$$S_0 = \kappa_0 \Delta\tau_{BA} = \frac{\kappa_0}{c} \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}} \quad (4.64)$$

Zur Bestimmung der Konstante κ_0 betrachten wir den nicht-relativistischen Grenzfall. Dazu wählen wir $\lambda = t$:

$$S_0 = \kappa_0 \int dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} = \kappa_0 \int dt \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\vec{v}^2}{c^2} + \dots \right] \quad (4.65)$$

Vergleich mit der nicht-relativistischen Wirkung eines freien Punktteilchens

$$S_{0,\text{nr}} = \frac{m}{2} \int dt \dot{\vec{x}}^2 \quad (4.66)$$

liefert die Konstante

$$\kappa_0 = -mc^2 \quad (4.67)$$

Die Wirkung des freien Punktteilchens ist also

$$S_0 = -mc^2 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau = -mc \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}} = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} \quad (4.68)$$

4.3.1 Variation der Wirkung

Die natürliche Anwendung auf die Wirkung des Punktteilchens wäre, als verallgemeinerte Koordinaten die Komponenten des Vierervektors, x^μ , zu wählen. Allerdings ist die Lage hier komplizierter, da die Komponenten wegen der Bedingung $u^2 = c^2$ nicht unabhängig voneinander sind. Es gibt mehrere Zugänge, diese Bedingung zu berücksichtigen. Drei einfache Möglichkeiten sind die folgenden:

- i) Nicht-kovarianter Formalismus: Wähle $\lambda = t$ und betrachte die räumlichen Koordinaten \vec{x} und Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ als verallgemeinerte Koordinaten:

$$S = \int dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} f(x, u) \equiv \int dt L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) \quad (4.69)$$

Die Lagrangegleichungen sind

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{dL}{d\dot{x}^i} - \frac{dL}{dx^i} \quad (4.70)$$

Diese Methode eignet sich besonders, um Kontakt zur Hamiltonschen Formulierung der Mechanik zu bekommen.

- ii) Kovarianter Formalismus: Wähle zunächst einen beliebigen Bahnparameter und betrachte $x^\mu(\lambda)$ und $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ als generalisierte Koordinaten.

Die Wirkung lässt sich schreiben als

$$S = \frac{1}{c} \int d\lambda \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} f(x, u) \equiv \int d\lambda L(x^\mu, \dot{x}^\mu) \quad (4.71)$$

Die Lagrangegleichungen sind

$$0 = \frac{d}{d\lambda} \frac{dL}{d\dot{x}^\mu} - \frac{dL}{dx^\mu} \quad (4.72)$$

Wähle nun $\lambda = \tau$. Für diesen Fall wird

$$\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = u^\mu u_\mu = c^2 \quad (4.73)$$

und die resultierende Bewegungsgleichung vereinfacht sich.

Diese Methode eignet sich besonders für die Verallgemeinerung auf die Allgemeine Relativitätstheorie, ist allerdings nicht für masselose Teilchen verwendbar. Außerdem zeigt sich, dass die Transformation auf die Hamiltonfunktion nicht definiert ist.

Für das freie Teilchen ist der Impuls

$$p_\mu = \frac{\partial L_0}{\partial x^\mu} = -m \sqrt{\frac{c^2}{\dot{x}^2}} \dot{x}_\mu \quad (4.74)$$

das heißt die Hamilton-Funktion ist

$$H_0 = \dot{x}^\mu p_\mu - L_0 = -m \dot{x}^2 \sqrt{\frac{c^2}{\dot{x}^2}} - (-mc^2) \sqrt{\frac{\dot{x}^2}{c^2}} = 0 \quad (4.75)$$

- iii) Umformulierung der Wirkung: Eine alternative Wirkung, die zu einer nicht-verschwindenden Hamiltonfunktion führt und auch für masselose Teilchen definiert ist, kann man durch Einführen eines **Hilfsfeldes** $e(\lambda)$ erreichen:

$$S[x, e] = \frac{1}{2} \int d\lambda (e^{-1}(\lambda) \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + m^2 c^2 e(\lambda)) \quad (4.76)$$

Man spricht von einem „Hilfsfeld“, wenn die Wirkung nicht von der verallgemeinerten Geschwindigkeit (hier \dot{e}) abhängt.

Die Bewegungsgleichungen sind

$$\frac{d}{d\lambda} (e^{-1} \dot{x}_\mu) = 0 \quad (4.77)$$

$$-e^{-2} \dot{x}^2 + m^2 c^2 = 0 \quad (4.78)$$

Für ein massives Teilchen lässt sich die zweite Gleichung nach e auflösen:

$$e = \frac{\sqrt{\dot{x}^2}}{mc} \quad (4.79)$$

Einsetzen in die Wirkung ergibt wieder die ursprüngliche Wirkung zurück.

Durch geeignete Wahl von λ lässt sich $e = 1$ wählen und man erhält die einfache Form der Wirkung

$$S[x] = \frac{1}{2} \int d\tau \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \quad (4.80)$$

wobei der konstante Term m^2 nicht zur Wirkung beiträgt und weggelassen wurde. Diese Form eignet sich auch für masselose Teilchen.

Die Wirkung (4.76) ist unter Umparametrisierungen der Bahnkurve invariant, wenn sich das Hilfsfeld unter einer Transformation des Bahnparameters wie folgt ändert:

$$\lambda \rightarrow \tilde{\lambda} = f(\lambda), \quad d\lambda \rightarrow d\tilde{\lambda} = f'(\lambda) d\lambda, \quad \tilde{e}(\tilde{\lambda}) = e(\lambda) \frac{1}{f'(\lambda)} \quad (4.81)$$

Dies ist mit der Lösung (4.79) verträglich. Durch die Freiheit der Wahl von λ lässt sich am Ende der Herleitung der Bewegungsgleichungen $e \rightarrow$ konstant setzen.

Freies Teilchen

Im folgenden verwenden wir die Methode ii. Zur Illustration der Prozedur, zuerst λ beliebig zu lassen und danach $\lambda = \tau$ betrachte das freie Teilchen

$$S_0 = -mc^2 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau = -mc^2 \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} d\lambda \sqrt{\frac{\dot{x}^2}{c^2}} \quad (4.82)$$

d.h. die Lagrangefunktion ist

$$L_0 = -mc^2 \sqrt{\frac{\dot{x}^2}{c^2}} \quad (4.83)$$

Die Variation δx^μ ergibt (wie üblich soll die Variation an den Rändern des Integrationsintervalls verschwinden, so dass frei partiell integriert werden kann)

$$\begin{aligned}\delta S &= -mc^2 \int d\lambda \frac{\dot{x}_\mu}{c^2} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2/c^2}} \delta \dot{x}^\mu \\ &= mc^2 \int d\lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\dot{x}_\mu}{c^2} \sqrt{\frac{c^2}{\dot{x}^2}} \right) \delta x^\mu \\ &= m \int d\tau \left(\frac{d}{d\tau} u_\mu \right) \delta x^\mu\end{aligned}\quad (4.84)$$

Im letzten Schritt wurden die Identitäten

$$\frac{d}{d\lambda} = \sqrt{\frac{\dot{x}^2}{c^2}} \frac{d}{d\tau} \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \sqrt{\frac{c^2}{\dot{x}^2}} \dot{x}^\mu \quad (4.85)$$

verwendet. Aus der Beliebigkeit der Variation δx^μ folgt also die Bewegungsgleichung des freien Teilchens

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = 0 \quad (4.86)$$

Dasselbe Ergebnis hätte man im zweiten Schritt von (6.37) durch die Ersetzung $\lambda \rightarrow \tau$ erhalten.

Erhaltungsgrößen

Nach dem Noether Theorem (2.61) ist bei der Invarianz der Lagrangefunktion eines Systems unter einer infinitesimalen Transformation (2.57)

$$\begin{aligned}q^a(t) &\rightarrow q^{a'}(t, \epsilon) = q^a(t) + \epsilon h^a(q^a, t) \\ v^a(t) &\rightarrow v^{a'}(t, \epsilon) = v^a(t) + \epsilon \frac{dh^a(q^a, t)}{dt}\end{aligned}\quad (4.87)$$

die Größe

$$Q_h = h^a \frac{\partial L}{\partial v^a} \quad (4.88)$$

zeitlich konstant. Für eine Lagrangefunktion eines N -Teilchensystems

$$L(x_n^\mu, \dot{x}_n^\mu, \lambda), \quad (4.89)$$

die unter infinitesimalen Raum-Zeit Translationen

$$x_n^\mu \rightarrow x_n^\mu - \epsilon a^\mu \quad (4.90)$$

invariant ist, ist nach dem Noether Theorem die Größe

$$Q_a = \sum_n a^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n^\mu} = \sum_n (a \cdot p_n) \quad (4.91)$$

erhalten,

$$\frac{dQ_a}{d\lambda} = 0 \quad (4.92)$$

mit dem kanonischen Impuls

$$p_n^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n^\mu} \quad (4.93)$$

Für ein System freier Teilchen bekommt man gerade

$$p_n^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n^\mu} = m \frac{\dot{x}_n^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} \quad (4.94)$$

Für die Parametrisierung $\lambda = \tau$ folgt aus dem Noether Theorem also gerade die Erhaltung des Gesamtimpulses des Systems,

$$0 = \frac{d}{d\tau} \sum_n p_n^\mu \quad (4.95)$$

da der Vierervektor a^μ beliebig ist.

Weitere Erhaltungsgrößen folgen aus der Invarianz der Lagrangefunktion unter infinitesimalen Lorentztransformationen:

$$x_n^\mu \rightarrow x_n^\mu - \epsilon \frac{i}{2} \omega_{\alpha\beta} \underbrace{(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu}_{i(g^{\alpha\mu}\delta_\nu^\beta - g^{\beta\mu}\delta_\nu^\alpha)} x_n^\nu = x_n^\mu + \epsilon \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (g^{\alpha\mu} x_n^\beta - g^{\beta\mu} x_n^\alpha) \quad (4.96)$$

Die zugehörigen Erhaltungsgrößen sind die relativistische Verallgemeinerung des Drehimpulses (\Rightarrow Übung).

4.3.2 Lorentzkraft

Wir betrachten die Wirkung

$$S = \int d\tau [-mc + \kappa u^\mu A_\mu(x)] = \int d\lambda L(x^\mu, \dot{x}^\mu) \quad (4.97)$$

mit

$$L(x^\mu, \dot{x}^\mu) = -mc \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} + \kappa \dot{x}^\mu A_\mu(x) \quad (4.98)$$

Hier wurde verwendet, dass

$$\int d\tau u^\mu A_\mu(x) = \int \underbrace{d\tau}_{d\lambda \frac{d\tau}{d\lambda}} \frac{dx^\mu}{d\tau} A_\mu(x) = \int d\lambda \frac{dx^\mu}{d\lambda} A_\mu(x) = \int d\lambda \dot{x}^\mu A_\mu \quad (4.99)$$

Für die Lagrangegleichung berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{x}^\mu} &= -mc \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}} + \kappa A_\mu \\ \frac{dL}{dx^\mu} &= \kappa \dot{x}^\nu \partial_\mu A_\nu \end{aligned} \quad (4.100)$$

Mit $\lambda = \tau$ bekommt man wegen $\frac{dA_\mu(x)}{d\tau} = u^\nu \partial_\nu A_\mu$

$$0 = -m \frac{du_\mu}{d\tau} + \kappa u^\nu \partial_\nu A_\mu - \kappa u^\nu \partial_\mu A_\nu \quad (4.101)$$

Damit reproduziert man für $\kappa = -q/c$ die Lorentz-Kraft:

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} u^\nu F_{\mu\nu} \quad (4.102)$$

wenn man den Feldstärketensor identifiziert:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.103)$$

Mit der Notation

$$A^\mu(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ A^i(x) \end{pmatrix} \quad (4.104)$$

erhält man die in der Elektrodynamik üblichen Ausdrücke für das elektrische Feld und das Magnetfeld durch das skalare Potential und das Vektorpotential:

$$\begin{aligned} E^i &= F^{i0} = \partial^i \phi - \partial^0 A^i \\ \Rightarrow \vec{E} &= -(\vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \dot{\vec{A}}) \\ B^i &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F^{jk} = -\epsilon^{ijk} \partial^j A^k = (\nabla \times A)^i \end{aligned} \quad (4.105)$$

Kapitel 5

Relativistische Feldtheorie und Elektrodynamik

5.1 Kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen

Nach der Identifikation der Komponenten des **Feldstärketensors** F mit den elektrischen und magnetischen Feldern,

$$E^i = F^{i0} \quad B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk} F^{jk} \quad (5.1)$$

suchen wir nun eine für die relativistisch kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen in Anwesenheit von Quellen,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (5.2a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.2b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.2c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (5.2d)$$

5.1.1 Ladungserhaltung und Viererstromdichte

Vierstromdichte

Die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte erfüllen die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho(t, \vec{x})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t, \vec{x}) = 0 \quad (5.3)$$

Diese lässt sich in relativistisch invarianter Form schreiben, wenn die **Viererstromdichte**

$$j^\mu(x) = \begin{pmatrix} \rho(x)c \\ j^i(x) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

eingeführt wird:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (5.5)$$

Die Identifizierung der Ladungsdichte und Stromdichte als Komponenten eines Vierervektors impliziert, dass sich diese unter Lorentztransformationen miteinander mischen:

$$\begin{aligned} c\rho' &= \gamma \left(c\rho - (\vec{\beta} \cdot \vec{j}) \right) \\ j'^i &= \gamma(j_{\parallel}^i - v^i \rho) + j_{\perp}^i \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ladungserhaltung

Um zu sehen, dass die Identifikation der Ladungsdichte mit der Null-Komponenten eines Vierervektors konsistent ist, betrachte eine statische Ladungsverteilung, ρ_0 , die in dem Bezugssystem I_0 ruht, d.h. in diesem System gibt es eine Ladungsdichte aber keine Stromdichte. Betrachte nun die Ladungsverteilung aus einem System I , welches sich gegenüber I_0 mit der Geschwindigkeit v bewegt. Die in diesem System definierte Gesamtladung innerhalb eines Volumens V ,

$$Q(V) = \int_V d^3x \rho(x) \quad (5.7)$$

ist unverändert, wenn das Integral in dem Ruhesystem der Ladungsverteilung I_0 ausgewertet wird. Die Ladungsdichte in I ist

$$\rho(x) = \gamma \rho_0(x_0) \quad (5.8)$$

während sich die Volumenelemente wie

$$d^3x_0 = \det(\Lambda^i_j) d^3x = \gamma d^3x \quad (5.9)$$

zusammenhängen. Für die letzte Identität ist es ausreichend, einen Boost z.B. in die x -Richtung zu betrachten wo

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Hier ist zu beachten, dass das Volumen in I definiert wird,¹ d.h. es wird bei festgehaltener Zeit in I integriert, $dt = 0$. Damit ist

$$dx_0 = \gamma(dx - vdt) = \gamma dx \quad (5.11)$$

¹ Diese Anordnung ist dadurch ausgezeichnet, dass in I_0 die Stromdichte verschwindet und in I nur über das räumliche Volumen integriert wird. Würde man von einem räumlichen Volumen in I_0 ausgehen, müsste man in I einen Ausdruck, der die Stromdichte beinhaltet über ein Raum-Zeitvolumen integrieren, das über die Lorentztransformation mit dem Volumen in I_0 zusammenhängt.

Daher gilt

$$\int_V d^3x \rho(x) = \int_V d^3x' \rho'(x') \quad (5.12)$$

wobei das Volumen in den jeweiligen Koordinaten parametrisiert ist.

Die Kontinuitätsgleichung impliziert die **zeitliche Konstanz der Gesamtladung** im Raum:

$$\dot{Q} = \int_{V=\text{const.}} d^3x \partial_0 j^0(t, \vec{x}) = - \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \oint_{\delta V} d\vec{S} \cdot \vec{j} = 0. \quad (5.13)$$

wobei im letzten Schritt der Strom hinreichend schnell für $|\vec{x}'| \rightarrow \infty$ verschwinden muss.

Viererstromdichte einer Punktladung

Für ein **Punktteilchen mit Ladung** q , das sich auf der Bahnkurve $x^\mu(\tau)$ bewegt, sind die nicht-relativistischen Ausdrücke für die Ladungs- und Stromdichte

$$\rho(t, \vec{z}) = q \delta^3(\vec{z} - \vec{x}(t)), \quad \vec{j}(t, \vec{z}) = q \dot{\vec{x}}(t) \delta^3(\vec{z} - \vec{x}(t)), \quad (5.14)$$

Eine relativistisch kovariante Form ist durch den Ausdruck

$$j^\mu(z) = qc \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^4(z^\mu - x^\mu(\tau)) \quad (5.15)$$

gegeben. Die Äquivalenz sieht man durch Transformation von τ auf $t' = x^0/c$ als Integrationsvariable und Ausführen der t' -Integration:

$$\begin{aligned} j^\mu(z) &= qc \int d\tau \left(\frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau) \right) \delta(z^0 - x^0(\tau)) \delta^3(\vec{z} - \vec{x}(\tau)) \\ &= qc \int dt' \left(\frac{d}{dt'} x^\mu(t') \right) \delta(z^0 - ct') \delta^3(\vec{z} - \vec{x}(t')) \\ &= q \begin{pmatrix} c \\ \dot{x}^i(t') \end{pmatrix} \delta^3(\vec{z} - \vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} c\rho(t, \vec{z}) \\ j^i(t, \vec{z}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.16)$$

mit $t = z^0/c$. Die Äquivalenz des kovarianten Ausdrucks (5.15) mit den bekannten Ausdrücken (5.16) ist eine weitere Begründung für die Identifikation von Ladungsdichte und Stromdichte als Komponenten des Vierervektors j^μ .

5.1.2 Maxwellgleichungen

Inhomogene Maxwellgleichungen

Als kovariante Differentialgleichung erster Ordnung für den Feldstärketensor und die Stromdichte lässt sich die Gleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (5.17)$$

aufstellen. Die Komponenten ergeben

$$\partial_i F^{i0} = \partial_i E^i = \frac{4\pi}{c} j^0 \quad (5.18)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (5.19)$$

$$\partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} = -\partial_0 E^j - \epsilon^{ijk} \partial_i B^k = \frac{4\pi}{c} j^j \quad (5.20)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (5.21)$$

Wegen der Antisymmetrie des Feldstärketensors ist die inhomogene Maxwellgleichung (5.17) mit der Kontinuitätsgleichung verträglich:

$$\frac{4\pi}{c} \partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) F^{\mu\nu} = 0 \quad (5.22)$$

Homogene Maxwellgleichungen

Eine andere kovariante Möglichkeit, eine Differentialgleichung erster Ordnung für den Feldstärketensor zu konstruieren, ist mit dem total antisymmetrischen Tensor:

$$\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = ? \quad (5.23)$$

Dies motiviert die Definition des **dualen Feldstärketensors**

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (5.24)$$

Die Komponenten des dualen Feldstärketensors ergeben sich aus $F^{\mu\nu}$ gerade durch die Vertauschung $E \rightarrow B$ und $B \rightarrow -E$

$$\tilde{F}^{i0} = \frac{1}{2} \epsilon^{i0jk} F_{jk} = \underbrace{(-\epsilon^{0ijk})(-\epsilon^{jkl} B^l)}_{2\delta^{il}} = B^i \quad (5.25)$$

$$\tilde{F}^{ij} = \frac{1}{2} 2\epsilon^{ij0k} \underbrace{F_{0k}}_{-E_k} = \epsilon^{ijk} E^k \quad (5.26)$$

Die homogenen Maxwellgleichungen ergeben sich also aus der Gleichung

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.27)$$

Dies lässt sich auch in der Form

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = \frac{1}{6} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [\partial_\nu F_{\rho\sigma} + \partial_\sigma F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\sigma\nu}] = 0 \quad (5.28)$$

schreiben.

Vektorpotential und Eichinvarianz

Durch Einsetzen des Zusammenhangs des Feldstärketensors mit dem Vektorpotential wird aus den Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \partial^\nu(\partial \cdot A) = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (5.29)$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0 \quad (5.30)$$

Die homogenen Maxwellgleichungen sind wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen automatisch erfüllt.

Der Zusammenhang des Feldstärketensors mit dem Vektorpotential ist nicht eindeutig: Eine Umdefinition

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi \quad (5.31)$$

d.h.

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi - \dot{\chi} \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \end{aligned} \quad (5.32)$$

lässt den Feldstärketensor wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen unverändert:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu(A'^\nu - \partial'^\nu) - \partial'^\nu(A'^\mu - \partial'^\mu) = F^{\mu\nu} \quad (5.33)$$

Die Transformation (5.31) wird **Eichtransformation** genannt.

Es lässt sich immer eine Eichtransformation finden, so dass das Vektorpotential die sog. **Lorenz Eichung** erfüllt²:

$$\partial_\mu \cdot A'^\mu = 0 \quad (5.34)$$

Für ein gegebenes Vektorpotential muss die Eichfunktion χ dafür die Bedingung

$$0 = \partial_\mu(A^\mu + \partial^\mu \chi), \Rightarrow \square \chi = -\partial_\mu A^\mu \quad (5.35)$$

erfüllen. Diese Gleichung lässt sich mit geeigneten Randbedingungen lösen, d.h. es ist möglich, die Lorenz-Eichung zu wählen.

Ein Vektorpotential in Lorenz-Eichung erfüllt die **inhomogene Wellengleichung**

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (5.36)$$

Die Eichfunktion in Lorenz-Eichung ist nicht eindeutig festgelegt, da es noch möglich ist eine Lösung der homogenen Wellengleichung zur Eichfunktion zu addieren:

$$\chi(x) \rightarrow \chi(x) + f(x) \quad , \quad \square f(x) = 0 \quad (5.37)$$

²Diese Bedingung wurde von L. V. Lorenz 1867 eingeführt aber durch H. A. Lorentz 1904 in der heute verwendeten Notation angegeben und wird daher auch oft Lorentz Eichung genannt.

Freie Wellenlösungen

Die **freie Wellengleichung** mit $j^\mu = 0$ in Lorenz Eichung,

$$\square A^\mu = 0, \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (5.38)$$

lässt sich durch eine Fouriertransformation in der Form

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\epsilon^\mu(p)e^{-ip \cdot x} + \epsilon^{*\mu}(p)e^{ip \cdot x}) \quad (5.39)$$

lösen:

$$\square A^\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\mathbf{i})^2 p^2 (\epsilon^\mu(p)e^{-ip \cdot x} + \epsilon^{*\mu}(p)e^{ip \cdot x}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.40)$$

d.h.

$$p^0 = |\vec{p}| \quad (5.41)$$

Für den Fall, dass nur einer der Wellenvektoren p beiträgt (d.h. $\epsilon(p) \sim \delta^3(\vec{p} - \vec{k})$) bekommt man den Fall der in Abschnitt (2.3.4) diskutierten ebenen Wellen. Das Ergebnis (5.41) zeigt, dass der Wellenvektor k^μ ein Vierervektor mit der Energie-Impulsbeziehung eines masselosen Teilchens ist und bestätigt damit die bei der Herleitung des Doppler Effekts in Abschnitt (2.3.4) gemachte Annahme.

Die Lorenz Eichung führt zu der Bedingung an die **Polarisationsvektoren** ϵ

$$p_\mu \epsilon^\mu(p) = 0 \quad (5.42)$$

Betrachtet man als Beispiel einen Wellenvektor entlang der z -Achse, $p^\mu = (p, 0, 0, p)$, lässt sich eine Basis der Polarisationsvektoren wählen

$$\epsilon^+(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^-(p) = (\epsilon^+(p))^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^0(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

Der Vektor ϵ^0 ist proportional zum Wellenvektor und lässt sich durch eine Eichtransformation der Form (5.37) eliminieren, die im Impulsraum von der Form

$$f(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (f(p)e^{-ip \cdot x} + f^{*\mu}(p)e^{ip \cdot x}) \quad (5.44)$$

mit $p^0 = |\vec{p}|$ ist, d.h. auf die Polarisationsvektoren in der Form

$$\epsilon^\mu(p) \rightarrow \epsilon^\mu(p) - ip^\mu f(p) \quad (5.45)$$

wirkt. Die ebene Wellenlösung des Vektorpotentials hat also **zwei unabhängige Polarisationen**, die sich z.B. in der zirkulären Basis der ϵ^\pm entwickeln lassen.

“Herleitung” der Maxwell-Gleichungen

Bisher haben wir die Antisymmetrie des Feldstärketensors aus der Konsistenz der Lorentz-Kraft motiviert und gesehen, dass die Gleichung (5.17) gerade die inhomogenen Maxwell-Gleichungen ergibt. Hätte ein Physiker diese Form ohne Kenntnis der Maxwell Theorie finden können? Ein möglicher Zugang dazu ist der folgende:

- suche eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für ein Vektorfeld A^μ
- als Quelle tritt die Viererstromdichte auf, die die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ erfüllt.
- das Feld soll eine langreichweitige Kraft vermitteln, d.h. die Kraft zwischen zwei Punktladungen fällt wie im Coulomb Gesetz mit r^{-2} ab.
- Der allgemeinste Ansatz ist

$$[(ag^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + bg^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})\partial_\nu\partial_\rho + cg^{\mu\sigma}]A_\sigma = a\partial^\mu(\partial \cdot A) + b\Box A^\mu + cA^\mu = j^\mu \quad (5.46)$$

mit zu bestimmenden Konstanten a, b, c .

- Ein möglicher Term mit dem total antisymmetrischen Tensor verschwindet wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen.
- Der Term $c \neq 0$ würde zu einem exponentiell abfallenden Potential $\sim e^{-\sqrt{c}r}/r$ zwischen zwei Ladungen führen und wird daher nicht weiter betrachtet.

Durch Kontraktion mit ∂^μ und Verwendung der Vierer-Strom Erhaltung ergibt sich die Bedingung

$$(a + b)\Box(\partial \cdot A) = 0 \quad (5.47)$$

also

$$a = -b \quad (5.48)$$

d.h. mit der richtigen Normierung gerade die inhomogene Maxwellgleichung. Die Homogene Maxwellgleichung ist durch die Definition des Feldstärketensors durch das Vektorpotential automatisch erfüllt.

5.1.3 Lorentztransformationen der elektrischen und magnetischen Felder

Da der Feldstärketensor ein Tensor zweiter Stufe ist, transformieren sich seine Komponenten unter Lorentz-Transformationen per Definition als

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}. \quad (5.49)$$

Für einen Boost,

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta^i \\ -\gamma\beta^j & \delta_j^i - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta^i\beta^j \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

bekommt man für die Transformation des elektrischen Feldes

$$\begin{aligned} E'^i &= F'^{i0} = \Lambda^i{}_\rho \Lambda^0{}_\sigma F^{\rho\sigma} = (\Lambda^i{}_j \Lambda^0{}_0 - \Lambda^i{}_0 \Lambda^0{}_j) F^{j0} + \Lambda^i{}_j \Lambda^0{}_k F^{jk} \\ &= \gamma(\delta^i{}_j - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta^i\beta^j - \gamma\beta^i\beta^j) E^j + \gamma(\delta^i{}_j - \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\beta^i\beta^j) \beta^k \epsilon^{jkl} B^l \\ &= \gamma(E^i + (\vec{\beta} \times \vec{B})^i) - \beta^i(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Da sich der duale Feldstärketensor aus der Vertauschung $E \rightarrow B$ und $B \rightarrow -E$ ergibt, und sich genauso unter Lorentztransformationen verhält wie $F^{\mu\nu}$, ergibt sich die Transformation des magnetischen Feldes:

$$B'^i = \gamma(B^i - (\vec{\beta} \times \vec{E})^i) - \beta^i(\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \quad (5.52)$$

Die Transformationen werden durchsichtiger durch Einführen der üblichen transversalen und parallelen Komponenten:

$$E^i = E_{\parallel}^i + \gamma(E_{\perp}^i + (\vec{\beta} \times \vec{B}_{\perp})^i) \quad (5.53a)$$

$$B^i = B_{\parallel}^i + \gamma(B_{\perp}^i - (\vec{\beta} \times \vec{E}_{\perp})^i) \quad (5.53b)$$

Im Gegensatz zu den Komponenten eines Vierervektors, werden nur die Komponenten orthogonal zum Boost transformiert.

Das Transformationsverhalten (5.52) lässt sich natürlich auch direkt aus der Transformation des Feldstärketensors herleiten:

$$\begin{aligned} F'^{ij} &= \Lambda^i{}_\rho \Lambda^j{}_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^i{}_k \Lambda^j{}_l F^{kl} + (\Lambda^i{}_k \Lambda^j{}_0 - \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_k) F^{k0} \\ &= \left[\delta^i{}_k \delta^j{}_l - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} (\delta^i{}_k \beta^j \beta^l + \beta^i \beta^k \delta^j{}_l) \right] \epsilon^{klm} B^m - \gamma (\Lambda^i{}_k \beta^j - \beta^i \Lambda^j{}_k) E^k \\ &= \epsilon^{ijm} B^m - \frac{\gamma^2}{1+\gamma} (\delta^i{}_k \beta^j - \beta^i \delta^j{}_k) \epsilon^{klm} \beta^l B^m - \gamma (\Lambda^i{}_k \beta^j - \beta^i \Lambda^j{}_k) E^k \\ \Rightarrow B'^n &= -\frac{1}{2} \epsilon^{nij} F'^{ij} = B^n + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \epsilon^{ijn} \epsilon^{ilm} \beta^j \beta^l B^m + \gamma \underbrace{\epsilon^{nij} \Lambda^i{}_k \beta^j}_{\epsilon^{nkj} \beta^j} E^k \\ &= B^n + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \left(\underbrace{\beta^2}_{(\gamma^2-1)/\gamma^2} B^n - \beta^n (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \right) - \gamma (\vec{\beta} \times \vec{E})^n \end{aligned}$$

Beispiel

Wie in Abschnitt 2.2.4 betrachten wir wieder einen Draht auf der z -Achse, der im System I homogen geladen ist (Ladungsdichte ρ) und keinen Strom führt. Die elektrischen und

magnetischen Felder in Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$ in diesem System sind wieder

$$I : \quad \vec{E} = \frac{2\rho}{r} \vec{e}_r, \quad \vec{B} = 0 \quad (5.54)$$

Im System I' , in dem sich die Ladungsträger mit der Geschwindigkeit $-v$ entlang der z -Achse bewegen, haben Ladungs- und Stromdichte die Form

$$\begin{aligned} \rho' &= \gamma \rho \\ \vec{j}' &= -\gamma \vec{v} \rho, \end{aligned} \quad (5.55)$$

was sich durch den Faktor γ von den entsprechenden nicht-relativistischen Ausdrücken unterscheidet. Im Gegensatz zur nicht-relativistischen Betrachtung ändern sich sowohl das elektrische Feld als auch das Magnetfeld um einen Faktor γ :

$$I' : \quad \vec{E}' = \gamma \frac{2\rho}{r} \vec{e}_r, \quad \vec{B}' = -\gamma \frac{2\rho}{r} \beta \vec{e}_\phi \quad (5.56)$$

Dieses Verhalten ist mit den Transformationen (5.53) verträglich, da die Komponente beider Felder parallel zu $\vec{\beta} = \beta \vec{e}_z$ verschwindet,

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B}_\perp - \vec{\beta} \times \vec{E}_\perp) \quad (5.57)$$

da analog zum nicht-relativistischen Beispiel gilt

$$-\gamma \vec{\beta} \times \vec{E} = -\gamma \frac{2\rho}{r} \beta \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}_{=\vec{e}_\phi} = \vec{B}'. \quad (5.58)$$

Die Auflösung des Konflikts der Galileo-Transformationen mit den Maxwellgleichungen erfordert also insbesondere die Transformation der Ladungsdichte aufgrund der Volumenkontraktion.

5.2 Lagrange und Hamiltonsche Feldtheorie

Zur systematischen Herleitung von Feldgleichungen, die bestimmte Symmetrien respektieren, ist der Lagrange-Formalismus nützlich. Wir suchen daher eine Lagrangefunktion, aus der nach dem Variationsprinzip die Maxwellgleichungen folgern. Diese Methode lässt sich z.B. in der Elementarteilchenphysik zur Konstruktion komplizierterer Modelle der Wechselwirkung von Teilchen verwenden. In diesem Abschnitt wird daher die Lagrange-Mechanik auf die Beschreibung von Feldern verallgemeinert. Dieser Formalismus wird dann im nächsten Abschnitt auf die Maxwell-Theorie angewendet.

Hinweis: Falls nicht explizit angegeben, werden im Rest der Vorlesung Einheiten mit $c = 1$ verwendet.

5.2.1 Wirkung und Lagrangedichte

Die Verallgemeinerung der Lagrange-Formulierung der Mechanik auf Felder lässt sich schematisch folgendermaßen erhalten:

- Gehe von einem System mit einer großen aber endlichen Zahl von verallgemeinerten Koordinaten $q_i(t)$ aus, das durch eine Lagrangefunktion

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{5.59}$$

beschrieben wird.

Als Beispiel betrachte eine Kette von Massepunkten der Masse m an den Orten $q_i, i = 1, \dots, N$, welche mit Federn (mit Federkonstante k) verbunden sind. In der Ruhelage ist der Abstand der Massenpunkte durch a gegeben. Die Lagrangefunktion des Systems ist

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (m\dot{q}_i^2 - k(q_{i+1} - q_i)^2) \tag{5.60}$$

Es seien periodische Randbedingungen gegeben, d.h. $q_{N+1} = q_1$.

- Führe den Übergang zu einem Kontinuum durch, in dem der Index i in einen kontinuierlichen Freiheitsgrad \vec{x} übergeht. Aus den verallgemeinerten Koordinaten wird eine kontinuierliche Funktion von \vec{x} :

$$q_i(t) \rightarrow \Phi(\vec{x}, t). \tag{5.61}$$

Im Beispiel lässt sich dies durch die Identifikation $\Phi(q_i, t) = q_i(t)$ erreichen. Der Grenzfall $N \rightarrow \infty$ lässt sich durch

$$a \rightarrow 0, \quad m/a \rightarrow \rho = \text{const.}, \quad ak \rightarrow \eta = \text{const.} \tag{5.62}$$

definieren.

- In der Lagrangefunktion werden aus Koordinatendifferenzen Ableitungen:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{q_{i+1} - q_i}{a} = \left. \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=q_i} \tag{5.63}$$

Im Beispiel wird aus jedem Term der Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} m\dot{q}_i^2 - k(q_{i+1} - q_i)^2 &\rightarrow a \left(\rho \dot{x}_i^2 - \eta \frac{(q_{i+1} - q_i)^2}{a^2} \right) \\ &\rightarrow a \left(\rho \dot{\Phi}^2(q_i, t) - \eta \left(\frac{\partial \Phi(q_i, t)}{\partial x} \right)^2 \right) \\ &\equiv 2a\mathcal{L}_i \end{aligned} \tag{5.64}$$

- Summation über die Indizes i geht in Integration über \vec{x} über:

$$\sum_i a \rightarrow \int dx. \quad (5.65)$$

Die Lagrangefunktion wird ein Integral über eine **Lagrangedichte**

$$\sum_i a\mathcal{L}_i \rightarrow \int dx \mathcal{L} \quad \text{with} \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\varrho \dot{\Phi}^2(x, t) - \eta \left(\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (5.66)$$

- Im allgemeinen betrachten wir Wirkungen, die sich als Raum-Zeit Integral über eine Lagrangedichte schreiben lassen:

$$S = \int dt L[\Phi, \dot{\Phi}] = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi(x), \dot{\Phi}(x), \vec{\nabla}\Phi, \dots). \quad (5.67)$$

Wirkungen von dieser Form heißen **lokal**, da alle Felder in der Lagrangedichte am selben Raum-Zeitpunkt definiert sind.

- Die Wirkung ist invariant unter Poincaré Transformationen, wenn dies auch für \mathcal{L} gilt, da d^4x invariant ist.
- In einer Lorentz-invarianten Theorie, können Raum- und Zeitableitungen nur in der Kombination ∂_μ auftreten, so dass

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)). \quad (5.68)$$

Im obigen Beispiel gilt für $c = \sqrt{\frac{\eta}{\varrho}}$

$$\left(\varrho \dot{\Phi}^2(x, t) - \eta \left(\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right) \propto (\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) \quad (5.69)$$

5.2.2 Variationsprinzip

Das **Hamiltonsche Variationsprinzip** der Feldtheorie besagt, dass die Wirkung für die Lösung der Feldgleichungen extremal wird. Die Feldgleichungen lassen sich daher aus der Stationarität der Wirkung unter der **Variationen der Felder**

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \alpha \chi(x) \quad \partial_\mu \Phi(x) \rightarrow \partial_\mu \Phi(x) + \partial_\mu \chi(x) \quad (5.70)$$

herleiten. Es werden Variationen betrachtet, für die die Funktion $\chi(x)$ für $x \rightarrow \infty$ verschwindet. Die Variation der Wirkung ergibt unter Verwendung von partieller Integration

$$0 = \frac{dS}{d\alpha} = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x)} \chi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi(x)} \partial_\mu \chi(x) \right]$$

$$= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \Phi(x)} \right] \chi(x), \quad (5.71)$$

Da diese Gleichung für beliebige $\chi(x)$ gelten muss, folgt

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \Phi(x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x)}. \quad (5.72)$$

Dies sind die **Euler-Lagrange-Gleichungen für Feldtheorien**. Falls die Theorie mehrere Feld-Typen enthält oder mehrkomponentige Felder wie das Vektorpotential A_μ gilt eine Euler-Lagrange-Gleichung für jede Komponente bzw. jeden Feldtyp.

5.2.3 Hamiltonfunktion

Analog zum kanonischen Impuls in der Mechanik von Punktteilchen,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (5.73)$$

lässt sich die *kanonisch konjugierte Feldvariable* als

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}}. \quad (5.74)$$

definieren. Diese Variable ist nicht mit der Dichte des Feldimpulses zu verwechseln, die in Abschnitt 5.2.5 diskutiert wird.

Die **Hamilton-Dichte** \mathcal{H} ist in Analogie zur Hamiltonfunktion der Mechanik als

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L}. \quad (5.75)$$

definiert. Für mehrere Feldtypen oder mehrkomponentige Felder ist im ersten Term über alle Felder bzw. Komponenten zu summieren. Die **Hamiltonfunktion** ergibt sich durch Integration über das Volumen:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (5.76)$$

5.2.4 Reelles Skalarfeld

Als Beispiel betrachten wir ein reelles, skalares Feld ϕ , das sich trivial unter Lorentz-Transformationen transformiert.

$$\phi'(\Lambda x) = \phi(x). \quad (5.77)$$

Das Ziel ist, eine Lorentz-invariante Lagrangedichte für ϕ zu konstruieren:

- Die Lagrangedichte ist Lorentz-invariant, wenn sie aus einer Potenzreihe in ϕ und Lorentz-invarianten Kombinationen von Ableitungen wie $(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)$ besteht.

- Analog zur Mechanik fordern wir, dass höchstens quadratische Zeitableitungen vorkommen. Wegen der Lorentzinvarianz kommen daher höchstens zwei Potenzen des Operators ∂_μ vor.
- Es soll den Grenzfall „freier Felder“ geben, in dem die Feldgleichung linear in ϕ ist.
- Es werden Felder betrachtet, die im Unendlichen schnell genug verschwinden, so dass ohne Randterme partiell integriert werden kann. Damit sind alle Terme mit zwei Ableitungen, die quadratisch in den Feldern sind, äquivalent:

$$\int d^4x \left[a \phi \square \phi + b (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + \underbrace{c \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi) + d \square (\phi^2)}_{\text{„Oberflächenterme“}} \right] = \int d^4x (b - a) (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) \quad (5.78)$$

Als Beispiel einer Lagrangedichte wählen wir daher

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2 - V(\phi), \quad (5.79)$$

wobei $V(\phi)$ eine von unten beschränkte Funktion ist, damit die Energie nicht beliebig negativ werden kann („Vakuumstabilität“). Hier wurden keine Terme mit Ableitungen betrachtet, die höhere Potenzen als ϕ^2 haben, die auch zu Problemen mit der Vakuumstabilität führen können. Der kanonisch-konjugierte Impuls des Skalarfeldes ist

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}. \quad (5.80)$$

Damit ist die Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2 + V(\phi) \right]. \quad (5.81)$$

Mit der Euler-Lagrange Gleichung (5.72) bekommt man die Feldgleichung

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi(x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \quad (5.82)$$

Für den Fall des freien Feldes ($V(\phi) = 0$) heißt diese Gleichung **Klein-Gordon Gleichung**:

$$(\square + m^2) \phi = 0 \quad (5.83)$$

Analog zur Lösung der freien Wellengleichung lässt sich die allgemeine Lösung der Klein-Gordon Gleichung als

$$\phi(x) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \left[a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + a^*(\vec{p}) e^{ip \cdot x} \right] \quad (5.84)$$

schreiben mit Koeffizienten $a(\vec{p})$.

$$p^2 = m^2 \quad \Rightarrow \quad p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (5.85)$$

Dies ist die Energie-Impulsbeziehung eines Teilchens mit Masse m . In der Quantenfeldtheorie sind die Anregungen $a(\vec{p})$ quantisiert und entsprechen Teilchen mit Impuls \vec{p} und Masse m . Daher spricht man auch von einem „massiven Skalarfeld“.

5.2.5 Energie-Impulstensor

Für Punktteilchen folgt nach dem Noether Theorem die (Vierer-) Impulserhaltung aus der Invarianz unter Raum-Zeit Translationen. Analog lässt sich diese Invarianz für Feldtheorien benutzen, um Feld-Impuls und Energie zu definieren.

Unter einer Raum-Zeit-Translation

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu \tag{5.86}$$

transformieren sich die Felder als

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) \equiv \Phi(x + \epsilon) = \Phi(x) + \underbrace{\epsilon_\mu \partial^\mu \Phi(x)}_{\delta\Phi(x)} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{5.87}$$

Dies gilt insbesondere auch für die Lagrangedichte selbst, da sie eine skalare Funktion von x^μ ist:

$$\delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x + \epsilon) - \mathcal{L}(x) = \epsilon_\nu \partial^\nu \mathcal{L} \tag{5.88}$$

Da der Zusatzterm $\partial^\nu \mathcal{L}$ eine totale Ableitung ist, liefert er einen Oberflächenterm in der Wirkung, der nicht zu den Bewegungsgleichungen beiträgt, analog zur Situation bei Galilei-Transformationen in der nicht-relativistischen Mechanik:

$$S[\Phi'] = S[\Phi] + \underbrace{\int_V d^4x \epsilon_\nu \partial^\nu \mathcal{L}(\Phi)}_{\text{“Oberflächenintegral“}=0} = S[\Phi]. \tag{5.89}$$

Aus der Invarianz der Wirkung unter Translationen folgt die Erhaltungsgleichung

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{5.90}$$

mit dem **Energie-Impuls Tensor**

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi} \partial^\nu\Phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{5.91}$$

Für das **Beispiel des reellen Skalarfeldes** mit der Lagrangefunktion (5.79) ist der Energie-Impulstensor durch

$$T_\phi^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi. \tag{5.92}$$

gegeben.

Beweis von (5.91): Aus der Variation $\delta\mathcal{L}$ der Lagrangefunktion unter der Transformation $\Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\mathcal{L} - \epsilon_\nu \partial^\nu \mathcal{L}(\Phi) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} \epsilon_\nu \partial^\nu \Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\Phi} \epsilon_\nu \partial_\mu \partial^\nu \Phi - \epsilon_\nu \partial^\nu \mathcal{L}(\Phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \right] \epsilon_\nu \partial^\nu \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \epsilon_\nu \partial_\mu \partial^\nu \Phi - \epsilon_\nu \partial^\nu \mathcal{L}(\Phi) \\
&= \epsilon_\nu \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} \partial^\nu \Phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}(\Phi) \right].
\end{aligned} \tag{5.93}$$

In der dritten Zeile wurden die Euler-Lagrange-Gleichungen verwendet. Die Erhaltungsgleichung für $T^{\mu\nu}$ gilt also im allgemeinen nur bei Verwendung der Bewegungs- bzw. Feldgleichungen.

Die Erhaltungsgleichung (5.90) ist analog zur Kontinuitätsgleichung der Vierer-Stromdichte, die erhaltene Größe trägt hier allerdings einen weiteren Index. Durch Integration von $T^{0\mu}$ über ein Raumvolumen lässt sich der Vierervektor

$$P^\mu \equiv \int d^3x T^{0\mu} = \int d^3x [\Pi \partial^\mu \Phi - g^{0\mu} \mathcal{L}], \tag{5.94}$$

definieren. Diese Konstruktion ist analog zur Gesamtladung Q die durch die Integration über die Nullkomponente der Vierer-Stromdichte definiert ist (5.7) Der Name „Energie-Impulstensor“ ist dadurch motiviert, dass die Null-Komponenten von P^μ gerade die Hamiltonfunktion ergibt:

$$P^0 = \int d^3x [\Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L}] = \int d^3x \mathcal{H} = H \tag{5.95}$$

Die räumlichen Komponenten werden daher als **Feld-Impuls** interpretiert:

$$P^i = \int d^3x \Pi \partial^i \Phi, \quad \vec{P} = - \int d^3x \Pi \vec{\nabla} \Phi. \tag{5.96}$$

Analog zur Herleitung der Ladungserhaltung (5.13) folgt die **Erhaltung der Feld-Energie und des Feld-Impulses**:

$$\dot{P}^\mu = \int_{V=\text{const.}} d^3x \partial_0 T^{0\mu}(t, \vec{x}) = \int_V d^3x \partial_i T^{i\mu} = \oint_{\delta V} dS^i T^{i\mu} = 0. \tag{5.97}$$

Die Rolle der Komponenten $T^{i\mu}$ ist analog zur der der Stromdichte j^i bei der Ladungserhaltung. Die Interpretation der einzelnen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors sind also:

$$\begin{aligned}
T^{00} &: \text{Energiedichte} \\
T^{i0} &: \text{Energiestromdichte} \\
T^{0i} &: \text{Impulsdichte} \\
T^{ij} &: \text{Impulsstromdichte}
\end{aligned} \tag{5.98}$$

5.3 Wirkungsprinzip für das Elektromagnetische Feld

5.3.1 Lagrangedichte und Feldgleichungen

Als Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes suchen wir einen Lorentz-invarianten Ausdruck, der aus dem Feldstärketensor oder dem dualen Feldstärketensor zusammengesetzt ist. Da die Maxwellgleichungen linear in $F^{\mu\nu}$ sind, wird ein quadratischer Ausdruck

gesucht. Die möglichen Ausdrücke sind

$$I_1 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad I_2 = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \quad I_3 = \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \quad (5.99)$$

Es lässt sich zeigen, dass $I_1 \propto I_3$ und dass I_2 sich als totale Ableitung einer Funktion G^μ des Vektorpotentials schreiben lässt, $I_2 = \partial_\mu G^\mu$ (\Rightarrow Übung), so dass ein solcher Term nicht zur Bewegungsgleichung beiträgt. Daher lässt sich die **Lagrangedichte des freien elektromagnetischen Feldes** als

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)] \quad (5.100)$$

wählen. Addiert man zu der Wirkung des freien elektromagnetischen Feldes die Wirkung des geladenen Punktteilchens (4.97), erhält man die gesamte Wirkung des Systems

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{16\pi} \int d^4x F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \int d\tau [m + qu^\mu A_\mu(x)] \\ &= -\int d^4x \left[\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + A_\mu j^\mu \right] - mc \int d\tau \end{aligned} \quad (5.101)$$

wobei die Stromdichte (5.15)

$$j^\mu(z) = qc \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^4(z^\mu - x^\mu(\tau)) \quad (5.102)$$

verwendet wurde, um die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Feld als Volumenintegral zu schreiben.

Aus der Wirkung (5.101) folgt durch Variation nach dem Vektorpotential A_μ gerade die inhomogene Maxwell-Gleichung (\Rightarrow Übung)

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\nu = 0 \quad (5.103)$$

5.3.2 Energie-Impulstensor

Die Anwendung der Formel (5.91) auf das elektromagnetische Feld ergibt

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\rho} \partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right]. \quad (5.104)$$

Dieser Ausdruck ist nicht symmetrisch bezüglich Vertauschung von μ und ν , im Gegensatz zum Ergebnis für den reellen Skalar. Der Ausdruck ist auch nicht explizit eichinvariant, d.h. er ändert sich unter der Transformation $A_\rho \rightarrow A_\rho - \partial_\rho \chi$ (der erzeugte χ -abhängige Term ist allerdings eine totale Ableitung und trägt nicht zum Feld-Impuls bei [6]).

Um einen symmetrischen und manifest eichinvarianten Ausdruck zu bekommen, nutzt man die Beobachtung, dass der Energie-Impulstensor nicht eindeutig definiert ist: durch

Addition des Gradienten eines Tensors dritter Stufe, der antisymmetrisch bezüglich der ersten beiden Indizes ist, lässt sich ein **modifizierter Energie-Impuls-Tensor** konstruieren

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Sigma^{\rho\mu\nu}, \quad \Sigma^{\rho\mu\nu} = -\Sigma^{\mu\rho\nu} \quad (5.105)$$

der ebenfalls die Kontinuitätsgleichung erfüllt:

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\mu T^{\mu\nu}}_{=0} + \partial_\mu \partial_\rho \Sigma^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\rho [\Sigma^{\rho\mu\nu} + \Sigma^{\mu\rho\nu}] = 0. \quad (5.106)$$

Für das elektromagnetische Feld führt die Wahl

$$\Sigma^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} A^\nu \quad (5.107)$$

zu dem „verbesserten“ Energie-Impuls-Tensor

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} - F^{\mu\rho} \partial^\nu A_\rho + \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu) \right] = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu \right] \quad (5.108)$$

wo die inhomogene Maxwellgleichung für verschwindende Stromdichte verwendet wurde. Im folgenden wird immer die symmetrische Form verwendet, die wieder als $T^{\mu\nu}$ bezeichnet wird.

Drückt man die Komponenten des Energie-Impulstensors durch die elektrischen und magnetischen Felder aus, erhält man die aus der Elektrodynamik bekannten Ausdrücke (\Rightarrow Übungen)

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{8\pi} (\vec{B}^2 + \vec{E}^2) \sim w && \text{Energiedichte} \\ T^{0i} &= \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})^i \sim S^i && \text{Poynting-Vektor} \\ T^{ij} &= \frac{1}{4\pi} (E^i E^j + B^i B^j) - \frac{1}{2} \delta^{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \\ &\sim T_M^{ij} && \text{Maxwellscher Spannungstensor} \end{aligned} \quad (5.109)$$

Die Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors gilt nur für das Gesamtsystem Teilchen und elektromagnetisches Feld (+eventuell andere Felder), da Teilchen und Felder Energie und Impuls austauschen können. In der Anwesenheit von Strömen gilt für den Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes (\Rightarrow Übung)

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = j_\rho F^{\rho\nu} \quad (5.110)$$

Der Term auf der rechten Seite wird durch einen entsprechenden negativen Beitrag vom Energie-Impulstensor der Punktteilchen kompensiert. Zur Interpretation von (5.110) betrachte die Energie-Bilanz-Gleichung,

$$\partial_\mu T^{\mu 0} = \frac{dw}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = j_i F^{i0} = -(\vec{j} \cdot \vec{E}), \quad (5.111)$$

d.h. die von dem Feld am Teilchen geleistete Arbeit $\sim (\vec{j} \cdot \vec{E})$ führt zu einem Energieverlust des Feldes.

Kapitel 6

Ausblick auf die allgemeine Relativitätstheorie

In diesem Kapitel soll ein kurzer Überblick über die allgemeine Relativitätstheorie (ART) gegeben werden, die relativistische Theorie der Gravitation. Gesucht ist eine relativistische Verallgemeinerung der Newtonschen Gleichungen für die Gravitationskraft

$$\vec{F}_g = -m\vec{\nabla}\phi(x), \quad (6.1)$$

wobei das Gravitationspotential die Gleichung

$$\vec{\nabla}^2\phi = 4\pi G\rho_M \quad (6.2)$$

mit der Massendichte ρ_M und der Gravitationskonstante $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ erfüllt.

Eine naheliegende Möglichkeit wäre die Beschreibung durch ein skalares Feld mit einer Kopplung an Punktteilchen durch eine Wirkung von der Form

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \int d\tau(mc^2 + \kappa\phi(x)). \quad (6.3)$$

Eine solche Theorie ist theoretisch konsistent, macht aber Vorhersagen, die nicht mit dem Experiment übereinstimmen: die Vorhersage für die Periheldrehung des Merkur stimmt nicht mit der Beobachtung überein und es wird keine Ablenkung des Lichts im Gravitationsfeld vorhergesagt. Diese Vorhersagen sind dagegen zwei der Schlüsselvorhersagen der ART. Wir diskutieren zunächst das Äquivalenzprinzip, das von Einstein als Schlüssel zur Konstruktion der ART verwendet wurde und folgern einige qualitative Konsequenzen wie die Lichtablenkung und die Rotverschiebung im Gravitationsfeld. Danach geben wir einen kurzen Überblick über die ART. Für Details vieler Rechnungen sei auf Literatur zur ART verwiesen, z.B. [5, 9, 10, 11, 12]

6.1 Das Äquivalenzprinzip und physikalische Konsequenzen

6.1.1 Das Äquivalenzprinzip

Betrachte ein System von Teilchen an Orten \vec{x}_n in der Newtonschen Mechanik, die die durch Kräfte \vec{F} Galilei-invariant wechselwirken und sich in einem konstantem externen Gravitationsfeld \vec{g} befinden:

$$m_n \ddot{\vec{x}}_n = m_n \vec{g} + \sum_i \vec{F}(\vec{x}_n - \vec{x}_i) \quad (6.4)$$

Der Effekt des Gravitationsfeldes lässt sich durch eine Koordinatentransformation in ein **frei fallendes** Bezugssystem eliminieren:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad (6.5)$$

$$m_n \ddot{\vec{x}}'_n = \sum_i \vec{F}(\vec{x}'_n - \vec{x}'_i) \quad (6.6)$$

- Dies ist möglich, weil als Erfahrungstatsache die „träge Masse“ auf der linken Seite von (6.4) mit der „schweren Masse“ in der Gravitationskraft übereinstimmt.
- Ist das Gravitationsfeld nicht konstant wie in (6.4), $\vec{g}(\vec{x}, t)$ lässt sich die Gravitationskraft nur **lokal** in der Umgebung von (t_0, \vec{x}_0) durch eine Transformation (6.5) mit $\vec{g}(\vec{x}_0, t_0)$ eliminieren, d.h. es treten sog. „Gezeitenkräfte“ $\nabla^i g^j(x^i - x_0^i)$ etc. auf.

Das **Äquivalenzprinzip** postuliert nun, dass diese Eigenschaft des Gravitationsfeldes generell gilt (insbesondere auch in der relativistischen Mechanik):

Postulat. *An jedem Raum-Zeit-Punkt $x_0^\mu = (t_0, \vec{x}_0)$ in einem beliebigen Gravitationsfeld lässt sich ein „lokales Inertialsystem“ finden, in dem die Naturgesetze in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0^μ dieselbe Form haben, wie in einem Inertialsystem in der Abwesenheit eines Gravitationsfeldes.*

Diese Formulierung („starkes Äquivalenzprinzip“) gilt für alle Naturgesetze, d.h. z.B. auch für den Elektromagnetismus. Ein „schwaches Äquivalenzprinzip“ fordert nur die Äquivalenz für im Gravitationsfeld fallende Teilchen wie im Beispiel (6.4).

6.1.2 Erste physikalische Konsequenzen

Lichtablenkung im Gravitationsfeld

Schon aus dem Äquivalenzprinzip folgt, dass Licht im Gravitationsfeld abgelenkt wird, wie man an folgenden Gedankenexperimenten sieht:

Beschleunigtes Bezugssystem Ein Astronaut innerhalb einer beschleunigenden Rakete sendet einen Lichtstrahl senkrecht zur Bewegungsrichtung aus. Ein Beobachter in einem Inertialsystem sieht die geradlinige Ausbreitung des Lichtstrahls, der Astronaut beobachtet hingegen eine Krümmung des Lichtstrahls.

Gravitationsfeld Jetzt sende ein sich in einem Gravitationsfeld ruhender Beobachter einen Lichtstrahl senkrecht zur Gravitationskraft aus, der von einem Astronaut in einer frei im Gravitationsfeld fallenden Rakete beobachtet wird. Nach dem Äquivalenzprinzip beobachtet der Astronaut eine geradlinige Ausbreitung des Lichtstrahls, d.h. der im Gravitationsfeld ruhende Beobachter sieht eine Krümmung des Lichtstrahls.

Rotverschiebung im Gravitationsfeld

Der Astronaut in der beschleunigenden Rakete sendet Lichtstrahlen parallel zur Beschleunigungsrichtung aus, die an der Spitze der Rakete detektiert werden. Da die Spitze der Rakete zum Zeitpunkt der Detektion des Lichtstrahls schneller ist als der Sender bei der Aussendung des Lichtstrahls, wird nach dem Dopplereffekt eine Rotverschiebung der Frequenz des Lichtstrahls beobachtet. Nach dem Äquivalenzprinzip impliziert dies auch eine Rotverschiebung für Lichtstrahlen im Gravitationsfeld.

6.2 Beschleunigte Bezugssysteme in der Speziellen Relativitätstheorie

Das Äquivalenzprinzip legt nahe, dass eine Formulierung der SRT, die in beschleunigten Bezugssystemen gültig ist, ein geeigneter Ausgangspunkt für die relativistische Beschreibung der Gravitation ist. Das soll hier skizziert werden.

6.2.1 Gleichmäßig beschleunigtes Bezugssystem

Nicht-relativistische Bewegung Für Geschwindigkeiten $v \ll c$ lässt sich als einfaches Beispiel die Transformation (6.5) auch in der SRT betrachten:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x'^i &= x^i - \frac{1}{2} a^i t^2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

wobei $\vec{g} = \vec{a}$ gesetzt wurde, um mögliche Verwechslungen mit der Metrik zu vermeiden. Mit

$$\begin{aligned} dt &= dt' \\ dx^i &= dx'^i + a^i t' dt' \end{aligned} \quad (6.8)$$

lässt sich das invariante Raum-Zeit Intervall als

$$d^2\tau = dt^2 - dx^{i2} = (1 - \vec{a}^2 t'^2) dt'^2 - 2t' dt' a^i dx'^i - dx'^{i2} \equiv g'_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \quad (6.9)$$

mit

$$g'_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (1 - \vec{a}^2 t'^2) & -t' a^i \\ -t' a^i & -\delta^{ij} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

In einem beschleunigten Bezugssystem hat die Metrik also nicht mehr dieselbe Form wie einem Inertialsystem und hängt von den Raum-Zeitkoordinaten ab. Dies ist allerdings lediglich die Folge der Beschreibung des Minkowski-Raums der SRT in einem nicht-Inertialsystem (analog zur Beschreibung des 3-dimensionalen euklidischen Raums durch krummlinige Koordinaten) und besagt noch nicht, dass die Raum-Zeit gekrümmt ist.

Relativistische Bewegung Mit den Ergebnissen (4.44) lässt sich die Transformation in ein beschleunigtes Bezugssystem auch für relativistische Bewegung diskutieren. Die Transformation lässt sich von der Form

$$t = \frac{1 + a\rho}{a} \sinh(a\tau), \quad x = \frac{1 + a\rho}{a} \cosh(a\tau), \quad (6.11)$$

wählen, wobei jetzt $c = 1$ gesetzt wurde. Hier sollen $\tau \in \mathbb{R}$ und $\rho \in \mathbb{R}^+$ als Koordinaten des Minkowski-Raums verwendet werden, die sogenannten **Rindler Koordinaten**. Für die Bahnkurve des mit a beschleunigten Teilchens gilt gerade $\rho = 0$, d.h. es ist in Rindler-Koordinaten in Ruhe. Die Koordinaten y, z werden im Folgenden nicht betrachtet.

Mit

$$\begin{aligned} dt &= \sinh a\tau d\rho + (1 + a\rho) \cosh a\tau d\tau \\ dx &= \cosh a\tau d\rho + (1 + a\rho) \sinh a\tau d\tau \end{aligned} \quad (6.12)$$

wird das invariante Linienelement in Rindler Koordinaten zu

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= dt^2 - dx^i{}^2 = ((1 + a\rho)^2 d^2\tau - d^2\rho) [\cosh^2 a\tau - \sinh^2 a\tau] \\ &= (1 + a\rho)^2 d^2\tau - d^2\rho \equiv g'_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \end{aligned} \quad (6.13)$$

mit

$$x'^{\alpha} = \begin{pmatrix} \tau \\ \rho \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

$$g'_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (1 + a\rho)^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

6.2.2 Allgemeine Koordinatentransformationen

Die in obigen Beispielen für beschleunigte Bezugssysteme gefundene Struktur lässt sich auf beliebige Koordinatentransformationen

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}(x) \quad (6.16)$$

$$dx^{\mu} \rightarrow dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \quad (6.17)$$

verallgemeinern. Die Komponenten der Metrik ergeben sich zu

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \underbrace{\left(g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \right)}_{\equiv g'_{\rho\sigma}} dx'^\rho dx'^\sigma \quad (6.18)$$

Im allgemeinen hängt die Metrik in einem nicht-Inertialsystem von den Raum-Zeit Koordinaten ab, $g_{\mu\nu}(x)$. Die Minkowski-Metrik wird in diesem Kontext üblicherweise als $\eta_{\mu\nu}$ bezeichnet,

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Die ko- und kontravarianten Komponenten von Tensoren transformieren sich analog zu den Komponenten der Metrik

$$T'^{\nu_1 \dots}{}_{\mu_1 \dots} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\beta_1}} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\beta_1 \dots} \equiv M_{\mu_1}{}^{\alpha_1} \dots M^{\nu_1}{}_{\beta_1} T_{\alpha_1 \dots}{}^{\beta_1 \dots} \quad (6.20)$$

Analog zur SRT transformieren sich die kovarianten Komponenten mit den inversen Transformationen:

$$(M^{-1})^\alpha{}_\mu M^\mu{}_\beta \equiv M_\mu{}^\alpha M^\mu{}_\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha_\beta \quad (6.21)$$

Im Gegensatz zur SRT ergibt die Ableitung eines Tensorfeldes nicht automatisch einen Tensor, da die Matrizen M i.a. von den Raum-Zeit Koordinaten abhängen und beim Bilden der Ableitungen berücksichtigt werden müssen:

$$\partial'_\mu T'^{\nu \dots} = M_\mu{}^\alpha \partial_\alpha (M^\nu{}_\beta T^{\beta \dots}) = M_\mu{}^\alpha M^\nu{}_\beta (\partial_\alpha T^{\beta \dots}) + M_\mu{}^\alpha (\partial_\alpha M^\nu{}_\beta) T^{\beta \dots} \quad (6.22)$$

Die systematische Konstruktion von Tensoren aus Ableitungen von Tensoren ist mit Methoden der Differentialgeometrie möglich.

6.3 Überblick über die Allgemeine Relativitätstheorie

6.3.1 Vom Äquivalenzprinzip zur gekrümmten Raumzeit

Lokale Inertialsysteme

Die mathematische Formulierung des Äquivalenzprinzips ist die folgende Aussage:

Theorem. *In der Umgebung eines Punktes x_0^μ lässt sich immer ein Koordinatensystem wählen, in dem die spezielle Relativitätstheorie gilt, d.h. die Metrik die Minkowski-Form annimmt:*

$$g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu} \quad (6.23)$$

Es lässt sich zeigen, dass dies für eine beliebige Metrik durch Koordinatentransformationen erreicht werden kann.¹

Weitere Bemerkungen und Konsequenzen:

- Es ist weiter möglich die ersten Ableitungen zu eliminieren. Die Metrik in dem „freifallenen Koordinatensystem“ bzw. lokalen Inertialsystem hat also in der Umgebung von x^0 die Form

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}|_{x_0} (x - x_0)^\rho (x - x_0)^\sigma + \dots \quad (6.24)$$

Das Nicht-Verschwinden der zweiten Ableitungen der Metrik im lokalen Inertialsystem ist also das Kennzeichen für eine gekrümmte Raumzeit.

- Eine kovariante Gleichung, d.h. eine Gleichung die aus Tensoren bezüglich allgemeiner Koordinatentransformationen (6.20) gebildet wird, nimmt in allen Koordinatensystemen dieselbe Form an, insbesondere auch im freifallenden System, in dem das Gravitationsfeld lokal verschwindet.

Gravitation und das Äquivalenzprinzip

Eine Beschreibung der Gravitation, die mit dem Äquivalenzprinzip vertäglich ist, lässt sich also folgendermaßen formulieren:

- Das Gravitationsfeld wird durch eine Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ beschrieben, die von den Raumzeit-Koordinaten abhängt.
- In einem in dem Gravitationsfeld freifallenden Koordinatensystemen sind die Naturgesetze invariant unter Lorentztransformationen.
- Eine kovariante Gleichung, die sich für $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ und $\partial_\rho g_{\mu\nu} \rightarrow 0$ auf eine in der SRT gültige Gleichung reduziert, ist also für die Verallgemeinerung für nichtverschwindendes Gravitationsfeld geeignet.
- Im allgemeinen lassen sich beliebig viele Gleichungen konstruieren lassen, die sich für die flache Raumzeit auf eine gegebene Gleichung in der SRT reduzieren. Das Äquivalenzprinzip schränkt diese noch weiter ein: Krümmungsterme, die aus den zweiten Ableitungen der Metrik gebildet werden, verschwinden im lokalen Inertialsystem nicht und sind deswegen nicht zugelassen.

¹10 der 16 Parameter der Transformationsmatrix $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}|_{x_0}$ reichen aus, um die 10 freien Parameter in der Metrik zu eliminieren, die übrigen 6 Parameter parametrisieren gerade die Lorentztransformationen.

6.3.2 Punktteilchen im Gravitationsfeld

Die Wirkung für ein Punktteilchen in einem beliebigem Koordinatensystem ergibt sich durch die Transformation der Metrik (6.18) als

$$S = -m \int d\lambda \sqrt{g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}. \quad (6.25)$$

Dieser Ausdruck ist invariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen und reduziert sich für die Minkowski-Metrik auf die korrekte Gleichung in der SRT. Er ist also geeignet, um die Bewegung eines Teilchens im Gravitationsfeld zu beschreiben.

Wir diskutieren kurz die Konsequenzen der Wirkung (6.25) für die Bewegung eines Teilchens im Gravitationsfeld, die Herleitungen werden weiter unten gegeben.

Geodätengleichung Aus dem Variationsprinzip für die Wirkung (6.25) findet man die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho \quad (6.26)$$

mit den sog. **Christoffel-Symbolen**²

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) \quad (6.27)$$

Dies ist die gesuchte Verallgemeinerung von Newtons Gleichung (6.1) Die Bewegungsgleichung (6.26) beschreibt die Bewegung auf der kürzesten Kurve in einem gekrümmten Raum (bzw. einer gekrümmten Raumzeit), einer sog. **Geodäten** und heißt deswegen **Geodätengleichung**.

Newtonsche Näherung Die Newtonsche Bewegungsgleichung eines Teilchens in einem Gravitations-Potential $\phi(x)$ lässt sich unter Verwendung folgender Näherungen aus der relativistischen Gleichung (6.26) herleiten:

- kleine Geschwindigkeiten: $\frac{dx^i}{dt} \ll 1$ oder äquivalent $\frac{dt}{d\tau} \gg \frac{dx^i}{d\tau}$
- statische Felder, $\partial_t \phi = 0$
- schwache Felder, $\phi \ll 1$.

Damit findet man die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}^i = -\Gamma_{00}^i \dot{x}^0 \dot{x}^0 = \frac{1}{2} \partial^i g_{00}(x) \quad (6.28)$$

Dies stimmt mit der Newtonschen Gleichung

$$\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla} \phi \quad (6.29)$$

² Diese Größen sind nicht die Komponenten eines Tensoren dritter Stufe, da sich nachrechnen läßt, dass sie sich unter Koordinatentransformationen nicht wie (6.20) verhalten.

überein, wenn

$$g_{00}(x) = 1 + 2\phi(x) \quad (6.30)$$

identifiziert wird. Für das Gravitationsfeld einer Punktmasse M am Ort \vec{x}_0 gilt insbesondere

$$g_{00}(\vec{x}) = 1 - \frac{2GM}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \quad (6.31)$$

Zeitdilatation und Rotverschiebung Die Eigenzeit eines in einem Gravitationsfeld ruhenden Teilchens ist i.a. nicht gleich der Eigenzeit:

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} dt^2 \stackrel{\dot{x}^i=0}{=} g_{00}(x) dt^2 \quad (6.32)$$

Im Grenzfall der Newtonschen Näherung gilt also

$$\Delta\tau = \sqrt{1 + 2\phi} \Delta t \approx (1 + \phi) \Delta t \quad (6.33)$$

Die Eigenzeiten von Beobachtern bei $r = r_A$ und $r = r_B$ für das gleiche Koordinatenzeitintervall Δt stehen also in der Beziehung

$$\frac{\Delta\tau_B}{\Delta\tau_A} = \frac{1 + \phi(r_B)}{1 + \phi(r_A)} \approx 1 + (\phi(r_B) - \phi(r_A)) \quad (6.34)$$

Für Beobachter im Gravitationsfeld einer Punktmasse M gilt also

$$\frac{\Delta\tau_B}{\Delta\tau_A} = 1 - \frac{GM}{r_A r_B} (r_A - r_B) \stackrel{r_A > r_B}{<} 1 \quad (6.35)$$

die Zeit im stärkeren Gravitationsfeld (bei r_B) vergeht also langsamer. Dieser Effekt bewirkt auch die **Rotverschiebung** von Licht: Licht, das bei r_B mit der Frequenz ν_B ausgesandt wird, wird bei r_A mit einer Frequenz $\nu_A < \nu_B$ detektiert:

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{\Delta\tau_B}{\Delta\tau_A} \stackrel{r_A > r_B}{<} 1 \quad (6.36)$$

Dies bestätigt die qualitative Diskussion der Rotverschiebung aufgrund des Äquivalenzprinzips. Es lässt sich zeigen, dass (6.34) schon quantitativ aus dem Äquivalenzprinzip folgt.

Herleitungen

Bewegungsgleichungen Die Variation der Wirkung (5.67) ergibt:

$$\begin{aligned} \delta S &= -m \int d\lambda \frac{1}{2\sqrt{g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}} [2g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \delta \dot{x}^\mu + (\partial_\mu g_{\rho\sigma}) \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma \delta x^\mu] \\ &= \frac{m}{2} \int d\lambda \left[\frac{d}{d\lambda} \left(2 \frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}} \right) - \frac{(\partial_\mu g_{\rho\sigma}) \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}{\sqrt{g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}} \right] \delta x^\mu \\ &= \frac{m}{2} \int d\tau \left(2 \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu) - (\partial_\mu g_{\rho\sigma}) \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma \right) \delta x^\mu \end{aligned} \quad (6.37)$$

Mit

$$\frac{d}{d\tau}g_{\mu\nu}(x(\tau)) = (\partial_\rho g_{\mu\nu}(x))\frac{dx^\rho}{d\tau} \quad (6.38)$$

bekommt man die Bewegungsgleichung

$$g_{\mu\nu}\ddot{x}^\nu = \frac{1}{2}(\partial_\mu g_{\rho\nu} - 2\partial_\rho g_{\mu\nu})\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu \quad (6.39)$$

die sich durch Symmetrisierung in μ und ν in die Form (6.26) bringen lässt.

Wie in Inertialsystemen ist die Größe $\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$ konstant:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) &= 2g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\ddot{x}^\nu + (\partial_\rho g_{\mu\nu})\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho \\ &= (\partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

Newtonsche Näherung Aus der Annahme kleiner Geschwindigkeiten folgt

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{00}^\mu\dot{x}^0\dot{x}^0 + \dots \quad (6.41)$$

Für schwache, statische Felder entwickeln wir die Metrik um die Minkowski-Metrik

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) + \dots \quad (6.42)$$

mit

$$\partial_0 h_{\mu\nu} = 0 \quad (6.43)$$

Damit ergeben sich die benötigten Christoffelsymbole in linearer Ordnung in $h_{\mu\nu}$ zu

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{0\sigma} - \partial_\sigma g_{00}) = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\partial_\sigma h_{00}(x) + \dots = -\frac{1}{2}\partial^\mu h_{00}(x) + \dots \quad (6.44)$$

Die Null-Komponenten der Bewegungsgleichung wird damit zu

$$\ddot{x}^0 = \frac{1}{2}\partial^0 h_{00}(x)\dot{x}^0\dot{x}^0 = 0 \quad (6.45)$$

d.h.

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \text{const.} = 1 \quad (6.46)$$

Der Raum-Anteil der Bewegungsgleichung ergibt damit

$$\ddot{x}^i = \frac{1}{2}\partial^i h_{00}(x) \quad (6.47)$$

6.3.3 Beispiele für Metriken

Die Form der Metrik für eine gegebene Massenverteilung lässt sich als Lösung der unten kurz diskutierten Einsteinschen Feldgleichung gewinnen, was hier nicht weiter diskutiert werden kann. Wir geben als Beispiele zwei exakte Lösungen: die Schwarzschild Lösung für den Aussenraum von Sternen und die Friedmann-Robertson-Walker (FRW) Metrik, die das expandierende Universum beschreibt.

Schwarzschild Metrik Die exakte Metrik in der Umgebung einer rotationssymmetrischen Masseverteilung mit Ladung M ist die sog. **Schwarzschild-Metrik** mit dem Linienelement in Kugelkoordinaten

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (6.48)$$

- Die Komponente g_{00} stimmt mit dem Ergebnis der Newtonschen Näherung überein.
- Für den sog. **Schwarzschildradius**

$$r = R_S = 2GM \quad (6.49)$$

verschwindet g_{00} während die Komponente g_{rr} divergiert. Es lässt sich zeigen, dass die Singularität bei $r = R_s$ ein Artefakt des verwendeten Koordinatensystems ist, man spricht von einer **Koordinatensingularität**. Lässt man ein Objekt frei unter dem Einfluss der Gravitation auf die Massenverteilung fallen, nimmt ein in der Schwarzschildmetrik ruhender Beobachter wegen $g_{00} = 0$ bei der Annäherung an den Schwarzschildradius eine unendliche Rotverschiebung und Zeitdehnung wahr, d.h. er sieht das Objekt nie den Schwarzschildradius erreichen. Man spricht von einem **Ereignishorizont**. Es lässt sich zeigen, dass dagegen für einen fallenden Beobachter der Schwarzschildradius kein ausgezeichneter Punkt ist und er den Ereignishorizont durchqueren kann.

- Für $r = 0$ divergiert die g_{00} Komponente. Diese Singularität kann nicht durch ein anderes Koordinatensystem beseitigt werden, dort divergiert die Krümmung der Raumzeit.
- Innerhalb einer ausgedehnten Massenverteilung gilt die Schwarzschildmetrik nicht, so dass die Singularität bei $r = 0$ nicht für die Beschreibung von Sternen physikalisch relevant ist. Ebenfalls ist der Schwarzschildradius für Sterne und Planeten viel kleiner als der Radius (etwa 3 km für die Sonne und 9 mm für die Erde). Objekte, die innerhalb ihres Ereignishorizonts „eingeschlossen“ sind, heißen **schwarze Löcher**.

Friedmann-Robertson-Walker Metrik Die Metrik einer isotropen, homogenen Raumzeit hat die Form

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \quad (6.50)$$

- Die Funktion $a(t)$ und der Parameter $k = 0, \pm 1$ werden durch Dichte und Druck der durch eine ideale Flüssigkeit modellierten Materie und Strahlung festgelegt.
- Der Fall $k = 0$ entspricht verschwindender räumlicher Krümmung, die Fälle $k = \pm 1$ positiver bzw. negativer Krümmung.

- Der Abstand von Galaxien, die sich an festen Orten r in der FRW Metrik befinden, ist proportional zu $a(t)$ und daher Zeit-abhängig.
- Beobachtungen zeigen, dass das Universum flach ist ($k = 0$) und expandiert, mit dem **Hubble Parameter**

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} > 0 \quad (6.51)$$

Der Wert H_0 für das heutige Universum ist $H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. (Ein Parsec (pc) sind 3.2 Lichtjahre).

6.3.4 Elektromagnetische Feldegleichungen in der gekrümmten Raumzeit

Auch die Verallgemeinerung der Maxwell-Gleichungen und der Lorentzkraft auf nicht-verschwindende Gravitationsfelder lässt sich mit Hilfe des Äquivalenzprinzips angeben. Dazu soll zunächst das generelle Schema für die Verallgemeinerung von Gleichungen der SRT skizziert werden.

Minimale Substitution

- Es lässt sich zeigen, dass für die ko- bzw. kontravarianten Komponenten eines Vektorfeldes A^μ die sog. **kovariante** Ableitung

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu A^\rho \quad \nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\rho A_\rho \quad (6.52)$$

die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe definiert, d.h.

$$\nabla'_\mu A'^\nu = M_\mu^\alpha M^\nu_\beta (\nabla_\alpha A^\beta), \quad (6.53)$$

da sich die Ableitungen der Transformationsmatrizen M in (6.22) gerade gegen analoge Terme im nicht-tensoriellen Transformationsgesetz der Christoffelsymbole wegheben. Verallgemeinerungen dieser Definition gelten für die kovariante Ableitung von Tensoren.

- Die Verallgemeinerung von Gleichungen der SRT auf die ART ist nach dem Schema

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \quad \partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu \quad d^4x \rightarrow d^4x \sqrt{-\det g} \quad (6.54)$$

möglich. Diese Vorschrift ist als **minimale Substitution** bekannt und ergibt empirisch bisher die richtigen Naturgesetze in der Gegenwart von Gravitationsfeldern.

Maxwell-Gleichungen und Lorentz-Kraft

Die inhomogene Maxwell-Gleichung in der Gegenwart eines Gravitationsfeldes ergibt sich nach der Vorschrift der minimalen Substitution zu

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = (4\pi)j^{\nu} \quad (6.55)$$

mit dem Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{\mu} A_{\nu} - \nabla_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}, \quad F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (6.56)$$

wobei sich die Christoffelsymbole in den kovarianten Ableitungen im Feldstärketensor herausheben.

Die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im Gravitationsfeld und dem elektromagnetischen Feld ist

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\rho} = qg^{\mu\nu} F_{\nu\rho} \dot{x}^{\rho} \quad (6.57)$$

da sich die Gleichung für ein verschwindendes Gravitationsfeld ($g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = 0$) in die Lorentzkraft in der SRT übergeht und beide Seiten der Gleichung die kovarianten Komponenten eines Vektors sind.

Um dies für die Geodätenleichung (6.26) zu sehen, bemerkt man, dass diese sich durch die kovariante Ableitung ausdrücken lässt und daher ein wohldefiniertes Transformationsverhalten unter Koordinatentransformationen hat:

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \dot{x}^{\rho} = \dot{x}^{\nu} (\partial_{\nu} x^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \dot{x}^{\rho}) = \dot{x}^{\nu} \nabla_{\nu} x^{\mu} \quad (6.58)$$

da nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tau} \partial_{\nu} \dot{x}^{\mu} = \frac{d\dot{x}^{\mu}}{d\tau}. \quad (6.59)$$

6.3.5 Feldgleichung für das Gravitationsfeld

Zur Vervollständigung der Theorie der Gravitation wird noch das Analog der Laplacegleichung (6.2) für das Gravitationspotential

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi G \rho_M \quad (6.60)$$

gesucht. Hier soll ein knapper Überblick über die Bedingungen gegeben werden, die zur Einsteinschen Feldgleichung führen, für detaillierte Rechnungen wird auf Literatur zur ART verwiesen.

- Da das Gravitationsfeld durch den metrischen Tensor beschrieben wird, wird eine Gleichung zwischen Tensoren zweiter Stufe gesucht.
- Als Quelle des Gravitationsfeldes kommt der Energie-Impulstensor in Frage, da die Komponenten T^{00} die Energiedichte ist, die sich für nicht-relativistische Teilchen auf die Massedichte reduziert. Die gesuchte Gleichung sollte also von der Form

$$G_{\mu\nu}[g] \propto G T_{\mu\nu} \quad (6.61)$$

sein.

- Der Tensor G sollte zweite Ableitungen der Metrik enthalten,

$$G_{\mu\nu}[g] \sim \square g_{\mu\nu} + \dots \quad (6.62)$$

und mit der Identifikation $g^{00} = 1 + 2\phi$ für statische und schwache Felder die Gleichung (6.2) reproduzieren. Das Objekt $\square g_{\mu\nu}$ bildet aber nicht die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe, da die Ableitung eines Tensors i.A. kein Tensor ist (6.22).

- Die Gleichung soll mit der Kontinuitätsgleichung des Energie Impulstensors verträglich sein, die nach dem Prinzip der minimalen Substitution (6.54) zu $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ verallgemeinert wird, d.h. es muss

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (6.63)$$

gelten.

Ein Tensor, der aus der Metrik gebildet wird und zweite Ableitungen enthält ist der sogenannte **Riemannsche Krümmungstensor**

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (6.64)$$

Die Tatsache, dass diese Größen die Komponenten eines Tensors sind, ist nicht nicht offensichtlich, folgt aber daraus, dass sich der Krümmungstensor als Kommutator von kovarianten Ableitungen definieren lässt:

$$[D_\mu, D_\nu]V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma \quad (6.65)$$

Aus dem Krümmungstensor lassen sich der **Ricci-Tensor** $R_{\mu\nu}$ und der **Krümmungsskalar** R bilden:

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (6.66)$$

Aus dem Ricci-Tensor, dem Krümmungsskalar und der Metrik lässt sich ein Tensor $G^{\mu\nu}$ konstruieren, der die Bedingung (6.63) erfüllt, der sog. **Einstein-Tensor**:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (6.67)$$

Die **Einsteinsche Feldgleichung** lautet schließlich

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (6.68)$$

- Der Einstein Tensor enthält komplizierte nicht-lineare Terme in der Metrik und ihren Ableitungen, d.h. eine Selbstwechselwirkung des Gravitationsfeldes, die daher kommt, dass das Gravitationsfeld selbst Energie und Impuls trägt.

- Betrachtet man kleine Abweichungen von der flachen Raum-Zeit $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \dots$ und linearisiert die Feldgleichung lässt sich durch Ausnutzen von Koordinatentransformationen die Gleichung

$$\square(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^\rho{}_\rho) = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (6.69)$$

herleiten. Analog zur elektromagnetischen Wellengleichung (5.36) beschreibt diese Gleichung für $T_{\mu\nu} = 0$ die freie Ausbreitung von Wellen, den sogenannten **Gravitationswellen**.

- Es lässt sich noch ein Term mit der **kosmologischen Konstante** Λ zur linken Seite von (6.68) addieren:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (6.70)$$

der wegen der Eigenschaft $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$ ebenfalls mit der Erhaltung des Energie-Impulstensors kompatibel ist. Kosmologische Beobachtungen ergeben einen sehr kleinen aber nicht-verschwindenden Wert für Λ .

Literaturverzeichnis

- [1] F. Scheck, “Theoretische Physik 1”, Springer Verlag, Heidelberg (2007).
- [2] T. Fliessbach, “Mechanik”, Springer Spektrum (2009).
- [3] R. U. Sexl and H. K. Urbantke, “Relativity, groups, particles: Special relativity and relativistic symmetry in field and particle physics,” Vienna, Austria: Springer (2001) 388 p
- [4] W. Rindler, “Relativity: Special, general, and cosmological,” Oxford, UK: Univ. Pr. (2006) 430 p
- [5] B. F. Schutz, “A First Course In General Relativity,” Cambridge, Uk: Univ. Pr. (2009).
- [6] M. Maggiore, “A Modern introduction to quantum field theory,” Oxford University Press, 2005. (Oxford Series in Physics, 12. ISBN 0 19 852073 5)
- [7] R. D. Blandford, K. S. Thorne, “Applications of Classical Physics”, <http://www.pma.caltech.edu/Courses/ph136/yr2012/>
- [8] J. D. Jackson, ”Klassische Elektrodynamik”, De Gruyter
- [9] S. M. Carroll, “Spacetime and geometry: An introduction to general relativity,” Addison-Wesley (2004) 513 p, siehe auch <http://preposterousuniverse.com/grnotes/>
- [10] R. U. Sexl und H. K. Urbantke, “Gravitation und Kosmologie”, Spektrum Akad. Verl.
- [11] T. Fliessbach, “Allgemeine Relativitätstheorie” Spektrum Akad. Verl. (1995) 406 p
- [12] M. Blau, “Lecture Notes on General Relativity”, <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRlecturenotes.html>